HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus logiikkaan 2, kevät 2016
Harjoitus 7: Kertaustehtäviä

Seuraavaista tehtävistä ei saa pisteitä. Tällä kertaa niihin ei myöskään ole tulossa malleja - mahdolliset kysymykset tehtävistä kannatta esittää joko laskuharjoitusohjaajille viimeisellä viikolla tai luennoitsijalle.

1. Olkoon $L = \{E\}$ verkkojen aakkosto. Ilmaise seuraavat ominaisuudet predikaattilogiikan kaavoilla:

(a) On olemassa piste, joka on kaikkien muiden pisteiden naapuri.

(b) Jokaisella pisteellä on täsmälleen kaksi naapuria.

2. Anna malli ja tulkintafunktio, jotka toteuttavat kaavan $R(x,y) \wedge \exists x R(x, F(x))$ mutta eivät kaavaa $R(x, F(x))$.

3. Olkoon $\mathcal{M} = (\mathbb{Z}, R_0^{\mathcal{M}})$, missä $R_0^{\mathcal{M}} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{Z}, a-b \in \mathbb{P}\}$ ja $\mathbb{P}$ on alkulukujen joukko. Osoita Tarskin totuusmääritelmää käyttäen, että $\mathcal{M} \models \neg\exists x_0 \forall x_1 \neg R_0(x_0, x_1)$.

4. Osoita, että kaavat $\forall x A$ ja $\neg\exists x \neg A$ ovat loogisesti ekvivalentteja.

5. Osoita, että kaava $\forall x\ F(x) = x$ ei ole kaavan $\forall x\ F(F(x)) = x$ looginen seuraus.

6. Osoita, että lause $\forall x \exists y R(x,y) \vee \exists x \neg R(x,x)$ on validi.

7. Anna malli lauseelle $\forall x \exists y R(F(y), x) \wedge \neg\exists x R(F(x), x)$. Perustele vastauksesi.

8. Anna malli lauseelle $\forall x (P(x) \wedge \exists y R(x,y)$. Perustele vastauksesi.

9. Osoita suoraan Tarskin totuusmääritelmää käyttäen, että

$$\neg\exists x_0 P(x_0) \to (\forall x_1 (P(x_1) \to \neg x_1 = x_1))$$

on validi.

10. Mitkä termeistä

(a) $F(x)$

(b) $F(y)$

(c) $F(z)$

(d) $G(x,y)$

(e) $G(y,z)$

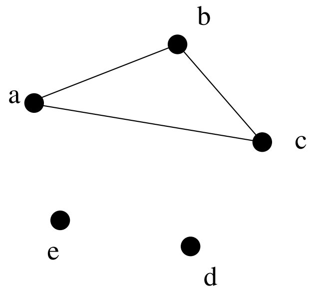
ovat vapaita muuttujalle y kaavassa

$$\forall x (R_0(x,y) \vee \forall y \exists z R_0(y,z))?$$

11. Olkoon $A = R(x,y) \wedge \exists x R(x,y) \wedge \forall y P(y)$. Ovatko seuraavat kaavat määritelty? Jos kaava on määritelty, mikä se on? Ellei, miksei?

(a) $A(c/x)$
(b) $A(x/y)$
(c) $A(y/x)$
(d) $A(c/y)$

12. Olkoon $\mathcal{G}$ seuraava verkko:



Osoita, että joukot $\emptyset$, $\{a, b, c\}$ ja $\{d, e\}$ ovat määriteltäviä.

13. Tarkastellaan funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolla $f(x) = x^2$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Osoita, että f:n kuvaaja on määriteltävä relaatio mallissa $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

14. Olkoon $L = \{R, c\}$ ja $\mathcal{M}$ L-malli, jonka universumi on

$$\mathrm{dom}(\mathcal{M}) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

ja jossa $c^{\mathcal{M}} = 1$ ja $R^{\mathcal{M}}$ on ekvivalenssirelaatio, jonka ekvivalenssiluokat ovat $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$ ja $\{5\}$.

Osoita, että joukko $\{3, 4\}$ on määriteltävä mallissa $\mathcal{M}$.

15. Päättele kaava $\neg\exists x P(x) \to \neg P(c)$.

16. Päättele oletuksesta $\forall x_0 \forall x_1 (R_0(x_0, x_1) \to (P_0(x_0) \land \neg P_0(x_1)))$ kaavat

(a) $\forall x_0 \neg R_0(x_0, x_0)$
(b) $\neg\exists x_3 P_0(x_3) \to \neg\exists x_0 R_0(x_0, x_1)$

17. Anna luonnollinen päättely lauseelle

$$\forall x_0 (\exists x_1 P(x_1) \lor \exists x_1 R(x_0, x_1))$$

lauseesta $\forall x_0 \exists x_1 (P(x_1) \lor R(x_0, x_1))$.

18. Anna luonnollinen päättely predikaattilogiikan lauseelle

$$\exists x_0 \exists x_1 R_0(x_0, x_1)$$

lauseista $\exists x_0 P_0(x_0)$ ja $\forall x_1 (P_0(x_1) \to R_0(x_1, x_1))$.

19. Osoita, että luonnollisella päättelyllä ei voi päätellä lausetta

$$\exists y \forall x (R(x, y) \lor R(y, x)) \to (\exists y \forall x R(x, y) \lor \exists y \forall x R(y, x)).$$

20. Voidaanko lause $\exists x \forall y R(x,y) \vee \forall x \exists y \neg R(y,x)$ päätellä luonnollisella päättelyllä? Todista vastauksesi oikeellisuus.

21. Olkoot $\mathcal{M}_1 = (\mathbb{Z}, F_0^{\mathcal{M}_1})$ ja $\mathcal{M}_2 = (\mathbb{Z}, F_0^{\mathcal{M}_2})$, missä $F_0^{\mathcal{M}_1}(n) = n+1$ ja $F_0^{\mathcal{M}_2}(n) = n-1$ jokaisella $n \in \mathbb{Z}$. Osoita, että $\mathcal{M}_1 \cong \mathcal{M}_2$ (eli että $\mathcal{M}_1$ ja $\mathcal{M}_2$ ovat isomorfiset).

22. Olkoon $L = \{R, c_0\}$, missä R on kaksipaikkainen relaatiosymboli ja c_0 on vakiosymboli. Olkoot $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ seuraavat L-mallit:

$$\mathrm{dom}(\mathcal{M}) = \{1,2,3,4,5\},\ R^{\mathcal{M}} = \{(1,2),(2,3),(3,5)\} \text{ ja } c_0^{\mathcal{M}} = 3,$$

$$\mathrm{dom}(\mathcal{M}') = \{a,b,c,d,e\},\ R^{\mathcal{M}'} = \{(a,b),(d,a),(e,d),\} \text{ ja } c_0^{\mathcal{M}'} = b.$$

Ovatko $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ isomorfiset? Perustele.

23. Olkoon $L = \{P, c, F\}$, missä P on (yksipaikkainen) predikaattisymboli, c on vakiosymboli ja F on yksipaikkainen funktiosymboli. Olkoot $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ seuraavat L-mallit:

$$\mathrm{dom}(\mathcal{M}) = \mathrm{dom}(\mathcal{M}') = \{1,2,3,4,5,6,7\},$$

$F^{\mathcal{M}}$ ja $F^{\mathcal{M}'}$ on määritelty seuraavasti:

x	$F^{\mathcal{M}}(x)$	$F^{\mathcal{M}'}(x)$
1	2	5
2	3	4
3	4	6
4	5	3
5	6	7
6	7	1
7	1	2

sekä $P^{\mathcal{M}} = \{1,3,5\}$, $P^{\mathcal{M}'} = \{2,3,5\}$, $c^{\mathcal{M}} = 2$ ja $c^{\mathcal{M}'} = 7$. Ovatko $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ isomorfiset? Perustele.

24. Osoita, että 0 on määriteltävä mallissa $(\mathbb{Z}, +)$ ($+$ on tavanomainen yhteenlasku kaksipaikkaisena funktiona), muttei struktuurissa $(\mathbb{Z}, S)$, missä S on seuraajafunktio $S(k) = k+1$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$.

25. Olkoon $L = \{E\}$ verkkojen aakkosto (eli E on kaksipaikkainen relaatiosymboli). Kuinka monta epäisomorfista kahden alkion

(a) L–mallia

(b) verkkoa

on olemassa?