HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus logiikkaan 2, kevät 2016
Harjoitus 6

Tehtäväsarja I

Seuraavat tehtävät perustuvat kurssimateriaalin lukuun 8 aksioomeista ja teorioista.

1. Osoita, että $(\mathbb{Q}, <)$ toteuttaa järjestyksen aksioomat.

2. Päättele
$$\exists x \forall y\, y = x \to \forall u \forall v\, u = v.$$
(Vihje: Mieti ensin, miksi lause on tosi, ennen kuin yrität muodostaa päättelyä.)

Tehtäväsarja II

Seuraavat tehtävät perustuvat kurssimateriaalin lukuun 9 funktioista.

3. Olkoon $L = \{F, G, c_0, c_1\}$, missä F on yksipaikkainen ja G kaksipaikkainen funktiosymboli. Olkoon $\mathcal{M}$ L-malli, jonka universumi on $\mathbb{N}$, ja jossa $F^{\mathcal{M}}(n) = n + 2$, $G^{\mathcal{M}}(n, m) = n \cdot m$, $c_0^{\mathcal{M}} = 0$ ja $c_1^{\mathcal{M}} = 5$. Olkoon s tulkintafunktio, jolla $s(x_n) = n$ kaikilla n. Määritä seuraavat termien arvot:

(a) $F(x_1)^{\mathcal{M}}\langle s \rangle$
(b) $F(G(c_0, c_1))^{\mathcal{M}}\langle s \rangle$
(c) $G(x_4, F(c_0))^{\mathcal{M}}\langle s \rangle$
(d) $G(F(x_0), F(x_2))^{\mathcal{M}}\langle s(8/x_0) \rangle$

4. Olkoon L aakkosto, joka koostuu vakiosymboleista c ja d ja kaksipaikkaisesta funktiosymbolista F. Olkoon $\mathcal{M}$ L-malli, jonka universumi on $\mathbb{Q}$ ja jolla $c^{\mathcal{M}} = 0$, $d^{\mathcal{M}} = 1$ ja $F(a, b) = a + b$ kaikilla a ja b. Mitkä mallin alkiot ovat vakiotermien tulkintoja? Vakiotermi on termi, jossa ei esiinny muuttujia, kuten esim. c ja $F(c, c)$.

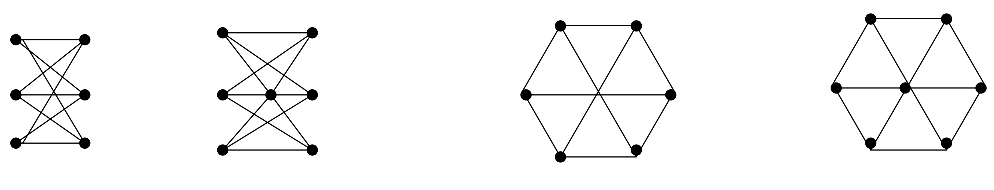
5. Olkoon $L = \{F\}$, missä F on yksipaikkainen funktiosymboli. Osoita aakkoston L termeille t joissa esiintyy vain muuttuja x_1:
$$\forall x_1 \forall y_1 (x_1 = y_1 \to t = t'),$$
missä t' on saatu termistä t korvaamalla x_1 muuttujalla y_1. Käytä identiteettiaksioomeja ja luonnollista päättelyä.

6. Päättele
$$\exists x \forall y R(x, y) \to \exists z R(z, F(z)).$$

Tehtäväsarja III

Seuraavat tehtävät perustuvat kurssimateriaalin lukuun 10 isomorfismista.

7. Mitkä seuraavista verkoista ovat isomorfisia keskenään?



8. Osoita, että 'olla isomorfiset' on L-mallien ekvivalenssirelaatio.

9. Olkoon $L = \{P, R\}$ aakkosto. Olkoon M joukko $\{0, 1, \ldots, 9\}$ (luonnolliset luvut nollasta yhdeksään). Määritellään kaksi L-mallia $\mathcal{M}_1$ ja $\mathcal{M}_2$ seuraavasti: Molempien universumi on joukko M,

$$P^{\mathcal{M}_1} = \{0, 1, 2\} \quad \text{ja} \quad P^{\mathcal{M}_2} = \{7, 8, 9\},$$

sekä

$$R^{\mathcal{M}_1} = R^{\mathcal{M}_2} = \{(2, 6), (6, 2), (2, 8)(8, 2), (6, 8), (8, 6)\}.$$

Ovatko mallit $\mathcal{M}_1 = (M, P^{\mathcal{M}_1}, R^{\mathcal{M}_1})$ ja $\mathcal{M}_2 = (M, P^{\mathcal{M}_2}, R^{\mathcal{M}_2})$ isomorfiset? Perustele.

10. Olkoon $L = \{P_0, c_0\}$, missä P_0 on yksipaikkainen predikaattisymboli ja c_0 on vakiosymboli. Olkoot

$$\mathcal{M}_1 = (\mathbb{Z}, P_0^{\mathcal{M}_1}, c_0^{\mathcal{M}_1}),$$

missä

$$P_0^{\mathcal{M}_1} = \mathbb{N} \quad \text{ja} \quad c_0^{\mathcal{M}_1} = 1$$

ja

$$\mathcal{M}_2 = (\mathbb{N}, P_0^{\mathcal{M}_2}, c_0^{\mathcal{M}_2}),$$

missä

$$P_0^{\mathcal{M}_2} = \{2k : k \in \mathbb{N}\} \quad \text{ja} \quad c_0^{\mathcal{M}_2} = 1.$$

Ovatko $\mathcal{M}_1$ ja $\mathcal{M}_2$ isomorfiset? Perustele tarkasti.

Seuraavasta haastetehtävästä ei saa harjoituspisteitä. Se on tarkoitettu syventämään määriteltävyyden ymmärtämistä.

Haastetehtävä

Osoita, että 2 ei ole määriteltävä mallissa $(\mathbb{Z}, <)$. (määritelävän alkion määritelmä tehtävässä 3.10)(Vihje: Jos f on isomorfismi mallilta itselleen, mitä se tekee mallin määriteltäville joukoille?)