HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus logiikkaan 1, kevät 2016
Harjoitus 5

Tehtäväsarja I

Seuraavat tehtävät perustuvat kurssimateriaalin lukuun 7 päättelystä.

1. Päättele lause $\neg\exists y P_0(y) \to \neg P_0(c)$.

2. Päättele lause
$$\neg(\forall x P_0(x) \land \exists x \neg P_0(x)).$$

3. Päättele lause
$$\forall x \exists y R_0(x,y) \land \forall x \exists y R_1(x,y)$$
lauseesta
$$\forall x \exists y (R_0(x,y) \land R_1(x,y)).$$

4. Päättele kaava $\forall x \exists z \exists y A \to \exists y \exists z A(c/x)$.

5. Osoita, että kaavasta $\exists x R_0(x,c)$ ei voi päätellä kaavaa $\exists x R_0(c,x)$.

6. Osoita, että seuraavaa lausetta ei voi päätellä luonnollisella päättelyllä:
$$\forall x \exists y \neg R(x,y) \to \forall x \neg \exists y R(x,y).$$

7. Osoita, että seuraavaa lausetta ei voi päätellä luonnollisella päättelyllä:
$$\forall x (P_0(x) \to \forall y P_0(y))$$

Tehtäväsarja II

Seuraavat tehtävät perustuvat kurssimateriaalin lukuun 8 teorioista.

8. Päättele $\exists x P(x) \to \forall x P(x)$ lauseesta $\forall x \forall y x = y$. Käytä identiteettiaksioomia.

9. Päättele järjestysaksioomeista
$$\forall x \forall y \forall z (x < y \to (z < y \lor x < z))$$

10. Päättele verkkojen aksioomeista
$$\forall x \forall y (xEy \to \neg x = y)$$

Seuraavasta haastetehtävästä ei saa harjoituspisteitä. Tällä kertaa se on todella haastava; ideana on rakentaa päättely induktiivisesti, mutta induktiota varten on ensin löydettävä toinen muotoilu, jota voi käyttää induktio-askeleessa. Jos haluat hieman kohtuullisemman haasteen, unohda induktio ja sijoita n:n paikalle 2 tai 3.

Haastetehtävä

Päättele järjestyksen aksioomeista
$$\exists x_1 \ldots \exists x_n \forall y (y = x_1 \lor \ldots \lor y = x_n)$$
$$\to \exists x \forall y (x < y \lor x = y)$$
(Jos järjestys on äärellinen, siinä on pienin alkio.)