HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus logiikkaan 1, kevät 2016
Harjoitus 4

Tehtäväsarja I

Seuraavat tehtävät perustuvat kurssimateriaalin lukuun 5 määriteltävyydestä.

1. Olkoon $\mathcal{M} = (M, R^{\mathcal{M}})$, missä

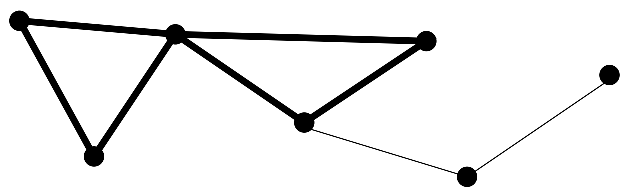
- $M = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ja
- $(a, b) \in R^{\mathcal{M}}$ joss a jakaa b:n.

Minkä joukon kaava

(a) $\exists x(R(x, y) \wedge \neg x = y)$
(b) $\exists y(R(x, y) \wedge \neg x = y)$

määrittelee mallissa?

2. Anna kaava, joka mielivaltaisessa verkossa määrittelee verkon 3-syklien viivoista koostuvan relaation. 3-sykli koostuu kolmesta pisteestä, joista jokaisesta on viiva kahteen muuhun saman syklin pisteeseen (eli kolmio). On siis määriteltävä relaatio, joka on viivarelaation alirelaatio, mutta johon kuuluu vain 3-syklien viivat. Esimerkiksi allaolevasta verkosta on määriteltävä lihavoiduista viivoista koostuva relaatio.



Tehtäväsarja II

Seuraavat tehtävät perustuvat materiaalin lukuun 6 sijoituksesta.

3. Mitkä annetuista termeistä ovat vapaita muuttujalle y kaavassa $\exists x R_0(y, x) \wedge P_1(y)$?

(a) x
(b) c
(c) y
(d) z

4. Mikä annetuista muuttujista voidaan vaihtaa sidotun muuttujan x tilalle kaavassa $\exists x R_0(x, z) \wedge \exists y R_1(z, y)$ ilman että kaavan merkitys muuttuu:

(a) z
(b) y
(c) x

5. Onko termi t vapaa muuttujalle x kaavassa A, kun

(a) $t = y$ ja $A = \exists y R(x, y)$

(b) $t = x$ ja $A = \exists x R(x, y)$

(c) $t = x$ ja $A = \exists y R(x, y)$

(d) $t = z$ ja $A = \exists z P(z) \wedge R(x, y)$

(e) $t = z$ ja $A = \exists z P(z) \wedge R(x, z)$

Jos sijoitus on sallittu, mikä on $A(t/x)$?

6. Todista seuraava erikoistapaus sijoituslemmasta suoraan Tarskin totuusmääritelmää käyttäen (huom. ei siis induktiota rakenteen suhteen): Olkoon A kaava $\forall z(R_0(y, z) \to P_0(z))$. Valitaan termiksi t muuttuja x. Tällöin seuraavat ehdot ovat ekvivalentteja kaikilla $\mathcal{M}$ ja s:

(a) $\mathcal{M} \models_s A(t/y)$

(b) $\mathcal{M} \models_{s(a/y)} A$, missä $a = t^{\mathcal{M}}\langle s \rangle$.

7. Todista sijoituslemma: Olkoon A mielivaltainen kaava ja t mielivaltainen termi, joka on vapaa muuttujalle y kaavassa A. Tällöin seuraavat ehdot ovat ekvivalentteja kaikilla $\mathcal{M}$ ja s:

(a) $\mathcal{M} \models_s A(t/y)$

(b) $\mathcal{M} \models_{s(a/y)} A$, missä $a = t^{\mathcal{M}}\langle s \rangle$.

Tehtäväsarja III

Seuraavat tehtävät perustuvat materiaalin lukuun 7.1 universaalikvanttorin päättelysäännöistä.

8. Päättele lause $\forall x R_0(x, x)$ lauseesta $\forall x \forall y R_0(x, y)$.

9. Päättele lause $\neg \forall x P_0(x)$ lauseesta $\forall x \neg P_0(x)$.

10. Päättele lause $\forall y P_1(y)$ lauseista $\forall x P_0(x)$ ja $\forall x(\neg P_1(x) \to \neg P_0(x))$.

Seuraavasta haastetehtävästä ei saa harjoituspisteitä, mutta se on varsin hyödyllinen kvanttoripäättelyharjoitus.

Haastetehtävä

Päättele $\forall x \forall y \forall z(R(x, y) \wedge P(z)) \to \forall x \forall y \forall z(R(y, z) \wedge P(x))$.