HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus logiikkaan 1, kevät 2016
Harjoitus 3

Tehtäväsarja I

Seuraavat tehtävät perustuvat kurssimateriaalin lukuihin 3.3–3.4 ja käsittelevät Tarskin totuusmääritelmää sekä loogisia seurauksia ja ekvivalensseja.

1. Osoita, että kaava $\neg\exists x P(x) \to \forall x \neg P(x)$ on validi.

2. Osoita, että kaava $\forall y \exists x A$ on kaavan $\exists x \forall y A$ looginen seuraus.

3. Piirrä verkko, joka toteuttaa kaavan $\forall x \exists y E(x,y)$ muttei kaavaa $\exists y \forall x E(x,y)$. Mitä tämä osoittaa kaavojen suhteesta toisiinsa.

4. Osoita, että kaavat $\forall x \exists y (R(x,y) \wedge R(y,x))$ ja $\forall x (\exists y R(x,y) \wedge \exists y R(y,x))$ eivät ole loogisesti ekvivalentteja. Onko jompi kumpi toisen looginen seuraus?

5. Osoita, että kaava $\forall x (P_0(x) \vee P_1(x)) \to (\forall x P_0(x) \vee \forall x P_1(x))$ ei ole validi.

Tehtäväsarja II

Seuraavat tehtävät perustuvat kurssimateriaalin lukuun 4 vapaista ja sidotuista muuttujista.

6. Mitkä muuttujien esiintymistä seuraavissa kaavoissa ovat vapaita ja mitkä sidottuja? Mitkä kaavoista ovat lauseita?

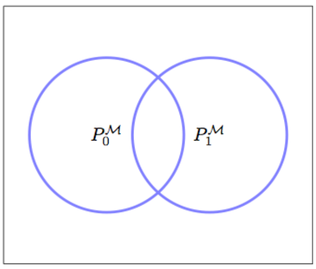
(a) $\forall x (P_0(x) \to P_1(y))$
(b) $\forall x (\forall y E(x,y) \vee \forall z E(y,z))$
(c) $\forall y (\exists x\, x < y \vee \exists x\, y < x)$
(d) $\forall x (P(x) \to \exists y R(x,y))$
(e) $\forall x P_0(y)$
(f) $\forall y (\exists x\, x < y \vee y < x)$

7. Olkoon A L-kaava ja $\mathcal{M}$ L-malli. Osoita, että jos s ja s' ovat tulkintafunktioita jotka yhtyvät (siis saavat saman arvon) niillä muuttujilla jotka esiintyvät vapaina kaavassa A, niin s toteuttaa kaavan A mallissa $\mathcal{M}$ jos ja vain jos s' toteuttaa kaavan A mallissa $\mathcal{M}$. (Ohje: Käytä induktiota kaavan A suhteen.)

Tehtäväsarja III

Seuraavat tehtävät perustuvat kurssimateriaalin lukuun 5 määriteltävyydestä.

8. Osoita kaavan $P_0(x) \to \neg P_1(x)$ määrittelemä joukko allaolevassa unaarisessa struktuurissa.



9. Piirrä binäärinen relaatio, jonka kaava

$$d < x \ \vee \ y < c$$

määrittelee mallissa $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, <, 0, 1)$, $c^{\mathcal{M}} = 0$, $d^{\mathcal{M}} = 1$.

10. Alkio a on määriteltävä mallissa $\mathcal{M}$ jos joukko $\{a\}$ on määriteltävä $\mathcal{M}$:ssä. Osoita, että 2 on määriteltävä mallissa $(\mathbb{N}, <)$, missä $<$ on luonnollisten lukujen luonnollinen järjestys.

Seuraavasta haastetehtävästä ei saa harjoituspisteitä. Se on tarkoitettu aivojumpaksi (ja saattaa syventää Tarskin totuusmääritelmän ymmärtämistä).

Haastetehtävä

Minkä ominaisuuden kaava

$$\exists x \exists y (x < y \wedge \exists x (y < x \wedge \exists y (x < y \wedge \exists x \, y < x)))$$

ilmaisee?
Vastaavalla muuttujien uusiokäytöllä, kuinka monta eri muuttujaa tarvitset ilmaisemaan, että verkossa on n-sykli?