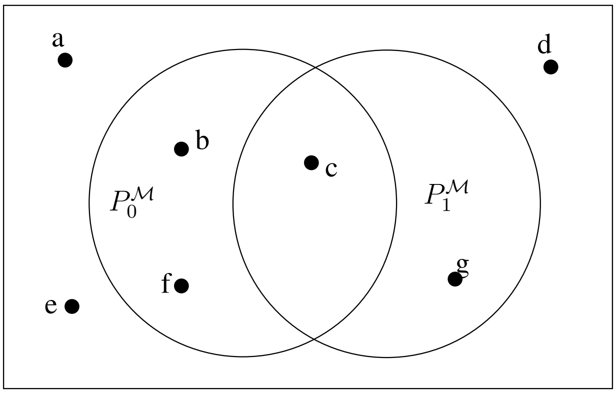
**HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos**
**Johdatus logiikkaan 1, kevät 2016**
**Harjoitus 2**

## Tehtäväsarja I

*Seuraavat tehtävät perustuvat kurssimateriaalin lukuihin 3.1–3.3 kaavojen toteutumisesta.*

**1.** Mitkä seuraavista tulkintafunktioista toteuttavat kaavan $P_0(x)$ kuvan 1 mallissa? Anna perustelu.

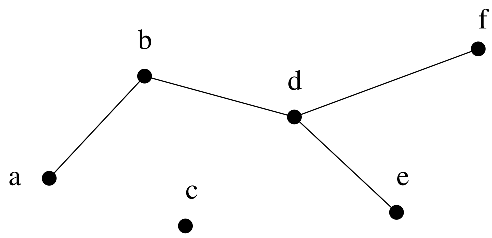
| | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $s_0$ | a | b | c |
| $s_1$ | b | e | f |
| $s_2$ | c | d | f |




Kuva 1: Malli

**2.** Mitkä seuraavista tulkintafunktioista toteuttavat kaavan $xEy$ kuvan 2 verkossa? Anna perustelu.

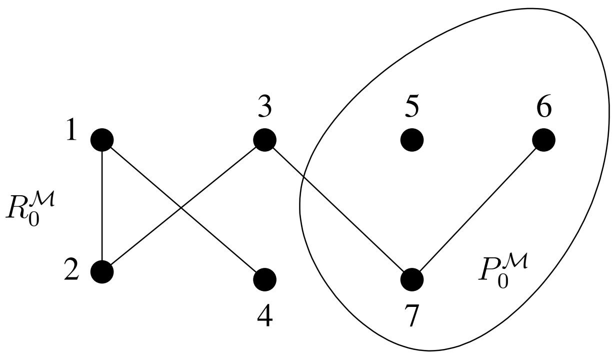
| | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $s_0$ | a | c | e |
| $s_1$ | b | d | f |
| $s_2$ | e | d | c |




Kuva 2: Verkko

**3.** Mitkä seuraavista tulkintafunktioista toteuttavat kaavan $P_0(x) \wedge R_0(y, z)$ kuvan 3 mallissa? Anna perustelu.

| | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $s_0$ | 1 | 3 | 6 |
| $s_1$ | 5 | 5 | 6 |
| $s_2$ | 7 | 1 | 2 |




Kuva 3: Malli

**4.** Mitkä seuraavista tulkintafunktioista toteuttavat kaavan $P_0(x) \leftrightarrow R(x, y)$ kuvan 3 mallissa? Anna perustelu.

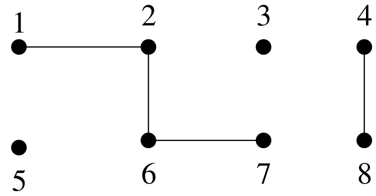
| | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $s_0$ | 1 | 2 | 6 |
| $s_1$ | 3 | 4 | 6 |
| $s_2$ | 2 | 5 | 7 |

**5.** Täytä tulkintafunktioiden arvot taulukkoon:

| | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $s$ | 1 | 2 | 6 |
| $s(3/x)$ | | | |
| $s(5/y)$ | | | |
| $s(3/z)(2/y)$ | | | |
| $s(1/x)(1/z)$ | | | |
| $s(2/x)(3/y)(4/x)$ | | | |

**6.** Mitkä seuraavista tulkintafunktioista toteuttavat kaavan $xEy$ kuvan 4 verkossa? Entä mitkä tulkintafunktioista toteuttavat kaavan $\exists y\ xEy$ ? Anna perustelu.

| | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $s_0$ | 1 | 2 | 3 |
| $s_1$ | 4 | 5 | 6 |
| $s_2$ | 3 | 8 | 7 |




Kuva 4: Verkko

**7.** Anna kolme eri tulkintafunktiota, jotka toteuttavat kaavan $\exists y(xEy \wedge yEz)$ mutteivät kaavaa $xEy \wedge yEz$ kuvan 4 verkossa. Perustele vastauksesi.

**8.** Anna $\{E\}$-kaava, joka ilmaisee, että jokaisella verkon pisteellä on ainakin kaksi eri naapuria. Kaksi verkon pistettä ovat naapureita, jos niiden välissä on viiva.

**Tehtäväsarja II**

*Seuraavat tehtävät perustuvat kurssimateriaalin lukuun 3.4 totuudesta, validisuudesta ja loogisesta ekvivalenssista.*

**9.** Ovatko seuraavat kaavat *tosia* kuvan 4 verkossa?

(a) $E(x, y)$

(b) $\exists x E(x, y)$

(c) $\exists x \exists y E(x, y)$

(d) $\exists y \exists z((E(x, y) \leftrightarrow E(x, z)) \wedge (E(x, y) \leftrightarrow E(y, z)))$

**10.** Osoita, että kaavat $\neg \forall x A$ ja $\exists x \neg A$ ovat (loogisesti) ekvivalentteja.

*Seuraavasta haastetehtävästä ei saa harjoituspisteitä (eikä siinä varsinaisia muita haasteita ole kuin induktio). Se antaa tavan koodata propositiologiikka predikaattilogiikan osaksi sallimatta propositiosymboleita.*

**Haastetehtävä**

Olkoon $L$ aakkosto $\{P_0, \ldots, P_n\}$. Jos $A$ on propositiolause, jossa esiintyy korkeintaan propositiosymbolit $p_0, \ldots, p_n$, niin olkoon $A^*$ määritelty seuraavasti:

$$\begin{array}{lcl} p_i^* & = & \exists x P_i(x) \\ (\neg A)^* & = & \neg A^* \\ (A \wedge B)^* & = & A^* \wedge B^* \\ (A \vee B)^* & = & A^* \vee B^* \\ (A \to B)^* & = & A^* \to B^* \\ (A \leftrightarrow B)^* & = & A^* \leftrightarrow B^* \end{array}$$

Osoita, että $A$ on toteutuva jos ja vain jos on olemassa $L$-malli $M$ ja tulkintafunktio $s$ siten että $M \models_s A^*$.