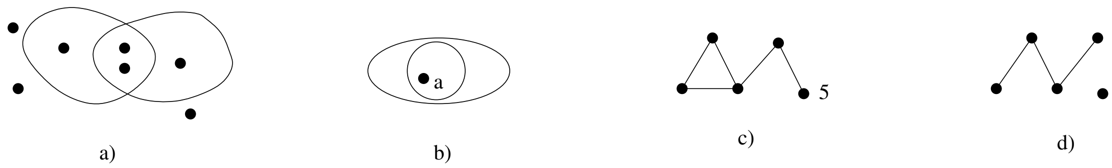
HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus logiikkaan 1, kevät 2016
Harjoitus 1

Tehtäväsarja I

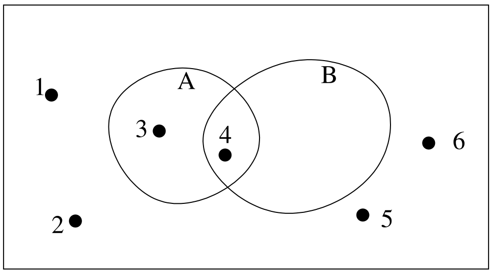
Seuraavat tehtävät perustuvat kurssimateriaalin lukuun 1 malleista ja aakkostoista.

1. Mikä aakkosto kuuluu mihinkin malliin? Mikä on jäljelle jäävän mallin aakkosto?

$$L_1 = \{P_1, P_2, c_0\}, \quad L_2 = \{P_3, P_8\}, \quad L_3 = \{R_0, c_0\}.$$



2. Olkoon $\mathcal{M}$ seuraava malli:



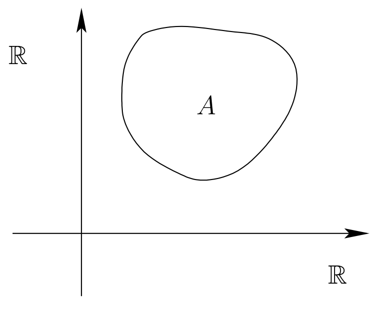
(a) Minkä aakkoston malli $\mathcal{M}$ on ?

(b) Mikä on $\mathrm{dom}(\mathcal{M})$?

(c) Mitkä ovat aakkoston symbolien tulkinnat?

Ovatko vastaukset yksikäsitteiset?

3. Olkoon $\mathcal{M}'$ seuraava malli:



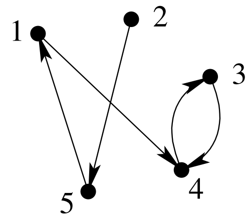
(a) Minkä aakkoston malli $\mathcal{M}'$ on ?

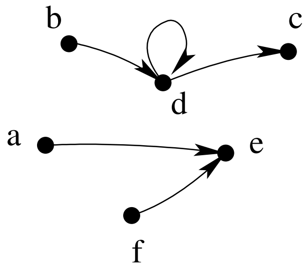
(b) Mikä on $\mathrm{dom}(\mathcal{M}')$?

(c) Mitkä ovat aakkoston symbolien tulkinnat?

Ovatko vastaukset yksikäsitteiset?

4. Kirjoita seuraavat kaksipaikkaiset relaatiot joukko-opillisella notaatiolla (eli pareista koostuvina joukkoina).

a) 

b) 

5. Anna aakkoston $\{P_0, P_1, P_2\}$ malli, jossa predikaatit jakavat mallin universumin viiteen osaan (P_i ovat yksipaikkaisia predikaattisymboleita).

6. Anna aakkoston $\{R_1, R_2, c_0\}$ malli, jossa relaatiosymboleiden tulkinnat ovat epätyhjiä ja poikkeavat toisistaan (R_i ovat kaksipaikkaisia relaatiosymboleita).

7. Anna esimerkki L-mallista, kun

(a) $L = \{P_0, P_1\}$,

(b) $L = \{R_0, R_1, c_0\}$,

(c) $L = \{P_0, P_1, R_0, c_0, c_1, c_2\}$.

8. Olkoot $L = \{P_0, P_1\}$ ja $L' = \{P_0, c_0, c_1\}$. Anna esimerkki malleista $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$, s.e. kaikki seuraavat pätevät:

- $\mathcal{M}$ on L-malli ja $\mathcal{M}'$ on L'-malli,
- $\mathrm{dom}(\mathcal{M}) \neq \mathrm{dom}(\mathcal{M}')$,
- $P_0^{\mathcal{M}'} = P_1^{\mathcal{M}} \neq P_0^{\mathcal{M}}$,
- $c_1^{\mathcal{M}'} \notin P_0^{\mathcal{M}'}$.

Tehtäväsarja II

Seuraavat tehtävät perustuvat kurssimateriaalin lukuun 2 kaavoista.

9. Mitkä seuraavista ovat predikaattilogiikan kaavoja?

(a) $x = y$

(b) $(x \wedge z)$

(c) $(P \wedge R(x, x))$

(d) $(\forall x\, x = y \wedge R(y, z))$

(e) $\forall x \exists x R(x, x)$

(f) $(\forall x \wedge \exists y R(x, y))$

(g) $\exists x R(x, \exists y)$

10. Miten kirjoittaisit luonnolliselle kielelle kaavat

(a) $\forall x P(x)$, kun tarkasteltavana mallina on ämpäreiden joukko, ja P merkitsee ominaisuutta 'olla sininen'.

(b) $\forall x \exists y R(x,y)$, kun tarkasteltavana mallina on luonnollisten lukujen joukko, ja R merkitsee järjestystä $<$.

(c) $\exists x(R(x,y) \wedge P(x))$, kun tarkasteltavana joukkona on laitoksen opettajien joukko, R merkitsee relaatiota 'olla pidempi kuin' ja P ominaisuutta 'olla kalju'.

Seuraavasta haastetehtävästä ei saa harjoituspisteitä. Se on tarkoitettu lisäpohdintatehtäväksi aiheesta kiinnostuneille.

Haastetehtävä

Toisinaan predikaattilogiikka esitetään muodossa, jossa aakkostoissa on vain relaatio- ja funktiosymboleita. Tällöin sallitaan myös 0-paikkaiset funktiot ja relaatiot. Mitä ne vastaavat? (Vihje: katso esim. Wikipedian artikkeleita 'Finitary relation' ja 'Arity'.)