

HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus logiikkaan 1, kevät 2016
Harjoitus 7: Kertaustehtäviä

Seuraavista tehtävistä ei saa pisteitä. Niitä voidaan käsitellä viimeisellä laskuharjoituskerrolla ja mallit ilmestyvät koeviikon aikana.

1. Onko propositiolause $((p_0 \rightarrow p_1) \rightarrow p_2) \rightarrow p_0$ tautologia, ristiriita vai kontingentti? Anna tarkka perustelu!
2. Onko propositiolause $p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_0))$ toteutuva? Entä onko se kumoutuva? Anna tarkka perustelu!
3. Onko seuraava propositiolause tautologia vai ei: $p_0 \rightarrow (\neg p_0 \vee p_1)$. Esitä perustelu vastauksellesi.
4. Onko propositiolause $(p_0 \wedge p_1) \vee p_2$ propositiolauseen $p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)$ looginen seuraus? Anna tarkka perustelu!
5. Ovatko lauseet $p_0 \rightarrow (\neg p_1 \rightarrow p_2)$ ja $\neg p_1 \rightarrow (p_0 \rightarrow p_2)$ loogisesti ekvivalentteja vai ei? Anna hyvä perustelu.
6. Esitä propositiolause $(p_1 \leftrightarrow p_2) \wedge (\neg p_0 \rightarrow (p_1 \vee p_2))$
 - a) disjunkttiivisessa normaalimuodossa
 - b) konjunkttiivisessa normaalimuodossa
7. Osoita, että $\{\vee, \rightarrow\}$ ei ole täydellinen (eli universaalinen) konnektiivijoukko.
8. Määritellään 3-paikkainen konnektiivi $*$ niin, että $v(*(A, B, C)) = 1$, jos $v(A) = v(B) = v(C) = 0$ tai $v(A) = 0$ ja $v(B) = v(C) = 1$ ja muuten $v(*(A, B, C)) = 0$.
 - (a) Esitä lause $*(p_0, p_1, p_2)$ disjunkttiivisessa normaalimuodossa.
 - (b) Näytä, että $\{*\}$ on täydellinen konnektiivijoukko.
9. Mitä tarkoitetaan päättelyjärjestelmän
 - (a) eheydellä?
 - (b) täydellisyydellä?Anna esimerkki päättelyjärjestelmästä, joka on
 - (a) ehyt ja täydellinen,
 - (b) ehyt muttei täydellinen,
 - (c) täydellinen muttei ehyt,
 - (d) ei ehyt eikä täydellinen.

10. Osoita resoluutiomenetelmällä, että

$$(p_0 \vee p_1 \vee p_2) \wedge (p_2 \vee \neg p_0) \wedge (p_0 \vee \neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_0 \vee p_1 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_1) \wedge (\neg p_0 \vee p_1)$$

on ristiriitainen.

11. Osoita resoluutiomenetelmän avulla, että $p_0 \wedge p_2 \wedge p_3$ on lauseiden $\neg p_0 \rightarrow p_1$, $p_1 \rightarrow p_0$, $p_0 \rightarrow (p_2 \wedge p_3)$ looginen seuraus.
12. Päättele luonnollisella päättelyllä lause $A \rightarrow C$ lauseista $A \rightarrow (B \vee C)$ ja $\neg B$.
13. Anna luonnollinen päättely $\{p_0 \vee \neg p_1\} \vdash p_1 \rightarrow p_0$.
14. Anna luonnollinen päättely $\{p_0 \wedge \neg p_1\} \vdash \neg(p_0 \rightarrow p_1)$.
15. Esitä luonnollinen päättely propositiolauseelle $\neg A \vee C$ oletuksesta $(\neg A \wedge C) \vee (\neg A \wedge D)$.
16. Anna luonnollinen päättely $\{A \wedge B\} \vdash ((A \vee B) \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow B)$.
17. Anna luonnollinen päättely propositiolauseelle $(A \wedge \neg A) \rightarrow (A \leftrightarrow B)$.
18. Voidaanko luonnollisella päättelyllä päätellä lause $p_0 \wedge p_1$ lauseista $(p_0 \vee p_1) \vee p_2$, $p_0 \rightarrow (p_1 \vee p_2)$ ja $p_2 \rightarrow p_0$? Perustelee tarkasti.
19. Voidaanko luonnollisella päättelyllä päätellä lause $\neg(p_0 \wedge p_1) \rightarrow p_2$ lauseesta $(\neg p_0 \rightarrow p_2) \wedge (\neg p_1 \rightarrow p_2)$? Perustelee tarkasti.
20. Voidaanko luonnollisella päättelyllä päätellä lause $(p_0 \leftrightarrow (p_2 \leftrightarrow p_1)) \rightarrow (p_0 \vee p_1)$? Perustelee tarkasti.
21. Todista materiaalin Lemma 7.16: Jos \mathcal{S} on joukko propositiolauseita ja A on propositiolause, niin seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:
 - (a) $\mathcal{S} \cup \{\neg A\}$ on ristiriitainen.
 - (b) $\mathcal{S} \vdash A$.
22. Käytä semanttista puuta löytääksesi totuusjakauman, joka toteuttaa propositiolauseen $((p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)) \wedge ((p_0 \rightarrow p_1) \rightarrow p_2)) \wedge \neg p_2$.
23. Käytä semanttista puuta selvittääksesi, onko propositiolause $\neg((p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)) \rightarrow ((p_0 \rightarrow p_1) \rightarrow p_2))$ toteutuva.
24. Anna semanttinen todistus lauseelle $(\neg\neg B \vee A) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$.
25. Anna semanttinen todistus lauseelle $\neg(A \wedge \neg B) \rightarrow (\neg A \vee B)$.
26. Anna semanttinen todistus lauseelle $(A \wedge B) \vee (\neg A \vee \neg B)$.
27. Anna semanttinen todistus lauseelle $(A \vee (B \vee C)) \rightarrow (C \vee (B \vee A))$.
28. Miten voit semanttisten puiden menetelmällä selvittää, onko lause tautologia, kontingentti vai ristiriitainen? Kokeile menetelmää tehtävien 1–2 propositiolauseisiin.