

Tehtäväsarja I

Seuraavat tehtävät perustuvat kurssimateriaalin lukuun 7 luonnollisesta päättelystä. Huomaa, että tehtävät ovat temaattisessa järjestyksessä, eivät välttämättä vaikeusjärjestyksessä.

- Päätele luonnollisella päättelyllä lause $A \rightarrow C$ lauseesta $\neg A$.
 - Päätele luonnollisella päättelyllä lause A lauseesta $\neg((A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C))$. (Vihje: käytä a-kohtaa.)
 - Päätele luonnollisella päättelyllä lause $(A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)$ lauseesta $(A \wedge B) \rightarrow C$. (Vihje: käytä b-kohtaa.)
- Todista eheyslauseen kohdat 6 ja 7, eli osoita, että implikaation tuonti- ja eliminointisäännöt säilyttävät eheyden.

Tehtävissä 3.–5. saa käyttää eheyslauseita, muttei täydellisyyslauseita. Vastaus tulee perustella hyvin.

- Osoita, ettei luonnollisella päättelyllä voi päätellä lausetta $(p_0 \vee p_1) \rightarrow p_2$ lauseesta $(p_0 \rightarrow p_2) \vee (p_1 \rightarrow p_2)$.
- Voidaanko luonnollisella päättelyllä päätellä lause $(p_0 \rightarrow p_2) \wedge (p_1 \rightarrow p_2)$ lauseesta $(p_0 \wedge p_1) \rightarrow p_2$?
- Voidaanko luonnollisella päättelyllä päätellä lause $(p_0 \wedge p_1) \rightarrow p_2$ lauseesta $(p_0 \rightarrow p_2) \wedge (p_1 \rightarrow p_2)$?

Seuraava tehtävä on helppo lemma, jota tarvitaan luonnollisen päättelyn täydellisyyslauseen todistamisessa (luku 7.5).

- Todista materiaalin Lemma 7.15: Olkoon \mathcal{S} joukko propositiolauseita. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:
 - \mathcal{S} on ristiriitainen.
 - Jollakin propositiolauseella A pätee $\mathcal{S} \vdash A$ ja $\mathcal{S} \vdash \neg A$.
 - Jokaisella propositiolauseella A pätee $\mathcal{S} \vdash A$.

Tehtäväsarja II

Seuraavat tehtävät perustuvat kurssimateriaalin lukuun 8 semanttisista puista.

- Etsi semanttisen puun avulla totuusjakauma, joka toteuttaa propositiolauseen

$$(p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)) \wedge (((p_0 \rightarrow p_1) \rightarrow p_2) \wedge \neg p_2).$$

- Anna semanttinen todistus propositiolauseelle $(A \wedge (B \vee C)) \rightarrow ((A \wedge B) \vee C)$.
- Anna semanttinen todistus propositiolauseelle $(A \vee (B \wedge C)) \rightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$.
- Anna semanttinen todistus lauseelle $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$

Seuraavasta haastetehtävästä ei saa harjoituspisteitä. Se on tarkoitettu lisäpohdintatehtäväksi aiheesta kiinnostuneille.

Haastetehtävä

Shefferin viiva on kaksipaikkainen konnektiivi $|$, jolle $v(A|B) = 0$ jos ja vain jos $v(A) = v(B) = 1$. Anna $A|B$:lle ja $\neg(A|B)$:lle säännöt semanttista puuta varten. Riittävätkö säännöt ehyeseen ja täydelliseen semanttiseen todistukseen lauseille, joissa esiintyy konnektiivina pelkkää Shefferin viivaa?