HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus logiikkaan 1, kevät 2016
Harjoitus 2

Lue kurssimateriaalin luvut 3-4 totuusarvoista ja totuusfunktioista

1. Oletetaan, että $v(p_0) = 1$, $v(p_1) = 0$ ja $v(p_2) = 0$. Määritä

(a) $v((p_0 \vee p_1) \leftrightarrow (p_2 \wedge \neg p_0))$,

(b) $v(p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2))$,

(c) $v(\neg(\neg p_0 \rightarrow \neg p_1) \vee \neg(\neg p_1 \rightarrow \neg p_2))$.

2. Anna esimerkki totuusjakaumasta, jolla lause

(a) $(p_0 \wedge (\neg p_1 \wedge (\neg p_2 \wedge (p_3 \wedge \neg p_4))))$

(b) $\neg((p_0 \wedge p_1) \rightarrow (\neg p_0 \wedge \neg p_1))$

(c) $(\neg p_0 \wedge ((p_1 \rightarrow p_2) \vee (p_3 \leftrightarrow \neg p_4)))$

on tosi.

3. Selvitä totuustaulun avulla onko lause

(a) $p_0 \vee \neg(p_0 \wedge p_1)$

(b) $((p_0 \rightarrow p_1) \rightarrow (p_1 \vee (p_2 \rightarrow p_0)))$

tautologia, kontingentti vai ristiriita.

4. Osoita totuustaulumenetelmällä, että seuraavat propositiolauseet ovat loogisesti ekvivalentteja:

(a) $A \rightarrow B$ ja $\neg A \vee B$

(b) $A \leftrightarrow B$ ja $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

5. Anna totuusjakauma, joka osoittaa allaolevan väitteen todeksi, tai todista, ettei sellaista ole olemassa:

(a) Propositiolause $(\neg p_0 \vee p_1) \leftrightarrow (p_0 \wedge p_1)$ on toteutuva.

(b) Propositiolause $(p_0 \rightarrow p_1) \wedge \neg(\neg p_0 \vee p_1)$ on toteutuva.

(c) Propositiolause $((p_0 \rightarrow p_1) \rightarrow p_1) \rightarrow p_1$ on kumoutuva.

(d) Propositiolause $(p_0 \leftrightarrow p_1) \leftrightarrow (p_0 \leftrightarrow (p_1 \leftrightarrow p_0))$ on kumoutuva.

6. Keksi kaksi propositiolausetta, joissa kummassakin esiintyy vähintään kaksi propositiosymbolia ja jotka eivät ole loogisesti ekvivalentit, mutta joista toinen on toisen looginen seuraus.

7. (a) Olkoon A propositiolause $p_0 \wedge \neg p_0$. Mikä on totuusfunktio f_A?

(b) Mitä voit sanoa tautologian, ristiriidan ja kontingentin lauseen totuusfunktiosta?

8. Ovatko seuraavat lauseet

(i) disjunktiivisessa normaalimuodossa?

(ii) konjunktiivisessa normaalimuodossa?

(a) p_0

(b) $p_0 \wedge \neg p_0$

(c) $p_0 \vee \neg p_0$

(d) $(p_0 \wedge p_1) \vee p_0$

(e) $(\neg p_0 \vee p_1) \wedge (\neg p_0 \vee \neg p_1)$

(f) $p_0 \wedge p_1 \wedge p_2$

(g) $p_0 \vee p_1 \vee p_2$

(h) $(p_0 \wedge p_1) \vee \neg(p_2 \wedge p_1)$

9. Anna disjunktiivisessa normaalimuodossa oleva propositiolause A johon liittyvä totuusfunktio f_A on:

x_0	x_1	x_2	$f(x_0, x_1, x_2)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

10. Anna konjunktiivisessa normaalimuodossa oleva propositiolause, joka on loogisesti ekvivalentti lauseen $((p_0 \leftrightarrow \neg p2) \rightarrow (p_0 \wedge p_1))$ kanssa.

Seuraavasta haastetehtävästä ei saa harjoituspisteitä. Tällä kertaa se on enemmän työläs kuin haasteellinen, mutta laajentaa propositiolauseiden käsittelyn teoreettista pohjaa (tätä itse asiassa käytetään kurssimateriaalin esimerkissä 4.9).

Haastetehtävä

Todista *ekvivalenttien sijoitussääntö*: Olkoon A propositiolause. Olkoon B on saatu lauseesta A korvaamalla p_i lauseella B_i kaikilla $i = 0, \ldots, n$ ja olkoon C saatu lauseesta A korvaamalla p_i lauseella C_i kaikilla $i = 0, \ldots, n$. Jos $B_i \Leftrightarrow C_i$ kaikilla $i = 0, \ldots, n$, niin $B \Leftrightarrow C$.