Mielivaltainen kokoelma induktiotodistuksia

Joni Puljujärvi

Koska logiikkaa opiskeleva ei ensimmäisillä kursseillaan välttämättä tule nähneeksi — niin materiaalissa kuin harjoitustehtävissäkään — tarpeeksi induktiotodistuksia, joissa todistetaan propositio- tai predikaattilogiikan kaavoja koskevia väitteitä induktiolla näiden kaavojen rakenteen suhteen, pyrin keräämään tähän dokumenttiin joitain lisäesimerkkejä kurssikirjallisuuden tueksi.

Lause 1. Yksikään propositiolause ei pääty merkkiin $\vee$.

Todistus. Olkoon A propositiolause.

Alkuaskel: Jos $A = p_i$ jollakin $i \in \mathbb{N}$, niin A päättyy merkkiin p_i, siis ei merkkiin $\vee$. Siten väite pätee propositiosymboleille.

Induktioaskel:

1. Jos $A = \neg B$ jollekin kaavalle B, joka ei pääty disjunktioon, niin kaavan A viimeinen merkki on sama kuin kaavan B, siis ei disjunktio.
2. Jos $A = (B \wedge C)$ joillekin kaavoille B ja C, niin kaavan A viimeinen merkki on sulkumerkki ")", siis ei disjunktio.

Muiden konnektiivien kohdat ovat identtisiä konjunktion kanssa. Siten väite pätee kaikille propositiolauseille. □

Lause 2. Jos propositiolauseessa on n konnektiivia, siinä on korkeintaan $4n + 1$ symbolia.

Viimeksi muokattu 17. helmikuuta 2016.

Todistus. Olkoon A propositiolause.

Alkuaskel: Jos $A = p_i$ jollain $i \in \mathbb{N}$: Nyt $n = 0$, ja kaavan A symbolien lukumäärä on $1 = 4 \cdot 0 + 1$. Siis väite pätee propositiosymboleille.

Induktioaskel: Induktio-oletus on, että jos $n \in \mathbb{N}$ ja kaavassa B on n konnektiivia, niin kaavassa B on enintään $4n + 1$ symbolia.

1. Jos $A = \neg B$ jollekin kaavalle B, jolle pätee induktio-oletus:

   Olkoon kaavan A konnektiivien määrä n. Siten kaavan B konnektiivien määrä on $n-1$. Induktio-oletuksen nojalla kaavassa B on nyt enintään $4(n-1)+1 = 4n-4+1 = 4n-3$ symbolia. Siten kaavassa A on enintään $(4n-3)+1 = 4n-2 \leq 4n+1$ symbolia.

2. Jos $A = (B \wedge C)$ joillekin kaavoille B ja C, joille pätee induktio-oletus:

   Olkoon kaavan A konnektiivien määrä n. Siten kaavojen B ja C konnektiivien yhteismäärä on $n-1$. Olkoon $k < n$ kaavan B konnektiivien lukumäärä. Nyt kaavan C konnektiivien lukumäärä on $n-k-1$. Induktio-oletuksen nojalla kaavassa B on enintään $4k+1$ symbolia ja kaavassa C enintään $4(n-k-1)+1 = 4n-4k-4+1 = 4n-4k-3$ symbolia. Siis kaavassa A on enintään $(4k+1)+(4n-4k-3)+3 = 4n+1$ symbolia.

Muille kaksipaikkaisille konnektiiveille todistuksen kohdat ovat identtisiä konjunktion kanssa.

Täten kaikissa propositiolauseissa, joissa on n konnektiivia, on korkeintaan $4n+1$ symbolia. $\square$

Lause 3. Olkoot $D_1, \ldots, D_n$ propositiolauseita, olkoon v totuusjakauma ja v' toinen totuusjakauma, jolle pätee

$$v'(p_i) = \begin{cases} v(D_i), \text{ jos } i \in \{1, \ldots, n\}, \\ v(p_i) \quad \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tällöin jokaiselle propositiolauseelle A pätee

$$v'(A) = v(A[p_1/D_1, \ldots, p_n/D_n]),$$

missä merkintä $A[p_i/D_i]$ tarkoittaa, että kaavasta A on korvattu propositiosymboli p_i kaavalla D_i.

Todistus. Olkoon A mielivaltainen propositiolause. Määritellään merkintöjen helpottamiseksi lyhennysmerkintä: $A[\bar{p}/\bar{D}] := A[p_1/D_1, \ldots, p_n/D_n]$. Todistetaan nyt väite induktiolla kaavan A rakenteen suhteen.

Alkuaskel: Jos $A = p_i$ jollain $i \in \mathbb{N}$:

Jos $i \in \{1, \ldots, n\}$, niin $A[\bar{p}/\bar{D}] = D_i$, jolloin jakauman v' määritelmän mukaan $v'(A) = v'(p_i) = v(D_i) = v(A[\bar{p}/\bar{D}])$. Jos taas $i \notin \{1, \ldots, n\}$, niin $A[\bar{p}/\bar{D}] = A$, jolloin jakauman v' määritelmän mukaan $v'(A) = v'(p_i) = v(p_i) = v(A[\bar{p}/\bar{D}])$.

Siis väite pätee propositiosymboleille.

Induktioaskel:

1. Jos $A = \neg B$ jollekin kaavalle B, jolle pätee $v'(B) = v(B[\bar{p}/\bar{D}])$:

   Nyt $A[\bar{p}/\bar{D}] = \neg B[\bar{p}/\bar{D}]$. Induktio-oletuksen nojalla $v'(B) = v(B[\bar{p}/\bar{D}])$, jolloin
   $$\begin{aligned} v'(A) = v'(\neg B) &= 1 - v'(B) = 1 - v(B[\bar{p}/\bar{D}]) \\ &= v(\neg B[\bar{p}/\bar{D}]) = v(A[\bar{p}/\bar{D}]). \end{aligned}$$

   Siis väite pätee negaatiolle.

2. Jos $A = (B \wedge C)$ joillekin kaavoille B ja C, joille pätee $v'(B) = v(B[\bar{p}/\bar{D}])$ ja $v'(C) = v(C[\bar{p}/\bar{D}])$:

   Nyt $A[\bar{p}/\bar{D}] = (B[\bar{p}/\bar{D}] \wedge C[\bar{p}/\bar{D}])$. Induktio-oletuksen nojalla pätee
   $$v'(A) = v'(B \wedge C) = v'(B) \cdot v'(C) \overset{\text{i.o}}{=} v(B[\bar{p}/\bar{D}]) \cdot v(C[\bar{p}/\bar{D}])$$
   $$= v(B[\bar{p}/\bar{D}] \wedge C[\bar{p}/\bar{D}]) = v(A[\bar{p}/\bar{D}]).$$

Kohdat muille konnektiiveille menevät vastaavalla tavalla kuin konjunktio — totuusmääritelmiä tarkastelemalla (ja lisäksi koska $\{\neg, \wedge\}$ on universaali konnektiivijoukko, propositiolauseen määritelmään riittäisivät nämä kaksi konnektiivia). □

Korollaari (Tautologian sijoitussääntö)**.** Olkoon A tautologia, ja olkoot $D_1, \ldots, D_n$ propositiolauseita. Tällöin kaava $A[p_1/D_1, \ldots, p_n/D_n]$ on tautologia.

Todistus. Olkoon v mielivaltainen totuusjakauma ja v' kuten lauseessa 3. Koska A on tautologia, niin $v'(A) = 1$. Nyt lauseen 3 nojalla $v(A[\bar{p}/\bar{D}]) = v'(A) = 1$. Koska v oli mielivaltainen totuusjakauma, niin $v(A[\bar{p}/\bar{D}]) = 1$ kaikilla totuusjakaumilla v, siis $A[\bar{p}/\bar{D}]$ on tautologia. □

Lause 4. Joukko $\{\neg, \to\}$ on täydellinen konnektiivijoukko.

Todistus. Olkoon f mielivaltainen totuusfunktio. Osoitetaan, että se voidaan ilmaista negaation ja implikaation avulla.

Oletetaan tunnetuksi, että jokaista totuusfunktiota vastaa disjunktiivisessa normaalimuodossa oleva propositiolause. Olkoon A sellainen DNF-muotoinen kaava, että $f_A = f$, missä f_A on kaavan A määrittelemä totuusfunktio. Nyt riittää osoittaa, että on olemassa kaava A', jolle pätee $A \iff A'$ ja jossa ei ole muita konnektiiveja kuin negaatio ja implikaatio.

Induktio kaavan A rakenteen suhteen:

Alkuaskel: Jos $A = p_i$ jollain $i \in \mathbb{N}$, niin kaavassa A ei ole konnektiiveja, joten kaavaksi A' kelpaa A itse.

Induktio-askel:

1. Jos $A = \neg B$, missä B on propositiolause, jolle on olemassa kaava B' siten, että $B \iff B'$ ja kaavassa B' on käytetty vain negaatiota ja implikaatiota, niin kaavaksi A' kelpaa kaava $\neg B'$.

2. Jos $A = (B \wedge C)$, missä B ja C ovat lauseita, joille on olemassa kaavat B' ja C', joissa on käytetty vain negaatiota ja implikaatiota, ja $B \iff B'$ ja $C \iff C'$:

   Osoitetaan totuustaulun avulla, että kaavat $(p_0 \wedge p_1)$ ja $\neg(p_0 \to \neg p_1)$ ovat loogisesti ekvivalentit.

p_0	p_1	$((p_0$	$\wedge$	$p_1)$	$\leftrightarrow$	$\neg$	$(p_0$	$\to$	$\neg$	$p_1))$
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0
0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0

   Olemme saaneet propositiolauseelle $(p_0 \wedge p_1)$ ekvivalentin muodon, joka käyttää vain implikaatiota ja negaatiota. Nyt riittää enää soveltaa tautologian sijoitussääntöä haluamiimme kaavoihin B ja C: koska kaava $\neg(p_0 \to \neg p_1) \leftrightarrow (p_0 \wedge p_1)$ on, kuten juuri osoitimme, tautologia, niin tautologian sijoitussäännön nojalla myös kaava $\neg(B \to \neg C) \leftrightarrow (B \wedge C)$ on tautologia. Siten kaavat $\neg(B \to \neg C)$ ja $(B \wedge C)$ ovat loogisesti ekvivalentit, ja koska ekvivalenttien sijoitussäännön nojalla tiedetään, että

   $$\neg(B \to \neg C) \iff \neg(B' \to \neg C'),$$

   niin loogisen ekvivalenssin transitiivisuuden nojalla tällöin

   $$A = (B \wedge C) \iff \neg(B' \to \neg C').$$

Siten voimme valita kaavaksi A' kaavan $\neg(B' \to \neg C')$.

3. Jos $A = (B \vee C)$ joillain kaavoilla B ja C, joille pätee induktio-oletus, riittää huomata, että $(B \vee C) \iff \neg(\neg B \wedge \neg C)$. Edellisten kohtien nojalla tiedetään, että vain konjunktiota ja negaatiota käyttäville lauseille on olemassa ekvivalentti lause, jossa on vain negaatiota ja implikaatiota. Kun sovelletaan niitä tähän disjunktion ekvivalenttiin muotoon, saadaan lause $A' = (\neg B' \to C')$.

Muita kohtia ei tarvitse tarkastella, sillä kaava A on DNF-muotoinen. Näytettiin, että mille tahansa disjunktiivisessa normaalimuodossa olevalle kaavalle A voidaan löytää loogisesti ekvivalentti kaava A', jossa on käytetty vain konnektiiveja $\neg$ ja $\to$, siis $f_A = f_{A'}$. Siten funktio $f = f_A = f_{A'}$ on määritelty pelkästään kyseisten konnektiivien avulla.

Täten $\{\neg, \to\}$ on täydellinen. $\square$

Lause 5. Sanotaan, että propositiolause A on *positiivinen*, jos se sisältää vain konnektiiveja $\wedge$ ja $\vee$ (erityisesti ei lainkaan konnektiiveja $\neg$ ja $\to$). Olkoot v ja v' sellaiset totuusjakaumat, että $v(p_i) \leq v'(p_i)$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$, ja olkoon A positiivinen propositiolause. Jos $v(A) = 1$, niin $v'(A) = 1$.

Todistus. Alkuaskel: Jos $A = p_i$ jollain $i \in \mathbb{N}$ ja $v(A) = 1$, niin koska $v(p_i) = v(A) = 1$ ja $v(p_i) \leq v'(p_i) \leq 1$, saadaan $1 \leq v'(p_i) = v'(A) \leq 1$. Siis $v'(A) = 1$.

Induktioaskel: Riittää tarkastella vain konjunktion ja disjunktion kohdat, sillä oletuksen nojalla A on positiivinen eli ei sisällä mitään muita konnektiiveja.

1. Jos $A = (B \wedge C)$ joillain kaavoilla B ja C, joille pätee, että jos $v(B) = 1$, niin $v'(B) = 1$, ja jos $v(C) = 1$, niin $v'(C) = 1$:

   Oletetaan, että $v(A) = 1$. Tällöin konjunktion totuusmääritelmän nojalla $v(B) = 1$ ja $v(C) = 1$. Nyt induktio-oletuksen nojalla $v'(B) = v'(C) = 1$ ja siten $v'(A) = v'(B \wedge C) = 1$.

2. Jos $A = (B \vee C)$ joillain kaavoilla B ja C, joille pätee, että jos $v(B) = 1$, niin $v'(B) = 1$, ja jos $v(C) = 1$, niin $v'(C) = 1$:

   Oletetaan, että $v(A) = 1$. Tiedetään, että joko $v(B) = 1$ tai sitten $v(B) = 0$. Jos $v(B) = 1$, niin induktio-oletuksen nojalla $v'(B) = 1$, jolloin $v'(A) = v'(B \vee C) = 1$. Jos taas $v(B) = 0$, niin koska $v(A) =$

$v(B \vee C) = 1$, täytyy disjunktion totuusmääritelmän nojalla päteä $v(C) = 1$. Nyt induktio-oletuksen nojalla $v'(C) = 1$, jolloin jälleen $v'(A) = v'(B \vee C) = 1$.

Siis väite pätee kaikilla positiivisilla propositiolauseilla A. $\square$

Lauseen 4 todistuksen yksityiskohdat: Kun osoitimme konnektiivijoukon $\{\neg, \rightarrow\}$ täydelliseksi, "keksimme" jostain tavan ilmaista konjunktion implikaation ja negaation avulla ja todistimme sen totuustaululla. Esitän tässä nyt yksityiskohdat, millä tavalla tämän propositiolauseen voi löytää.

Tunnetusti propositiolause $((p_0 \rightarrow p_1) \leftrightarrow \neg(p_0 \wedge \neg p_1))$ on tautologia (minkä voi helposti tarkistaa vaikka totuustaululla). Tämän näkee intuitiivisesti siitä, että implikaatio on epätosi vain siinä tapauksessa, että etujäsen on tosi mutta takajäsen ei, joten implikaatio on tosi tapauksessa, missä näin ei päde.

Nyt tautologian sijoitussäännön nojalla kaava $((p_0 \rightarrow \neg p_1) \leftrightarrow \neg(p_0 \wedge \neg\neg p_1))$ on niin ikään tautologia, sillä se on saatu edellisestä propositiolauseesta sijoittamalla symbolin p_1 paikalle kaava $\neg p_1$. Koska tämä lause on tautologia, niin kaavat $(p_0 \rightarrow \neg p_1)$ ja $\neg(p_0 \wedge \neg\neg p_1)$ ovat loogisesti ekvivalentit. Soveltamalla ekvivalenttien sijoitussääntöä saadaan

$$\neg(p_0 \wedge \neg\neg p_1) \iff \neg(p_0 \wedge p_1)$$

ja käyttämällä loogisen ekvivalenssin transitiivisuutta

$$(p_0 \rightarrow \neg p_1) \iff \neg(p_0 \wedge p_1).$$

Tiedetään, että jos kaksi kaavaa ovat keskenään loogisesti ekvivalentit, myös niiden negaatiot ovat keskenään. Siten

$$\neg(p_0 \rightarrow \neg p_1) \iff \neg\neg(p_0 \wedge p_1)$$

ja edelleen

$$\neg\neg(p_0 \wedge p_1) \iff (p_0 \wedge p_1)$$

ja edelleen transitiivisuudesta

$$\neg(p_0 \rightarrow \neg p_1) \iff (p_0 \wedge p_1).$$

Huom. Tietenkään ei ole tarpeen kirjoittaa todistusta näin yksityiskohtaisesti, vaan riittäisi heittää hatusta tai keksiä jostakin tai vain tietää, miten konjunktio kannattaa ilmaista negaation ja implikaation avulla ja sitten todistaa väite oikeaksi vaikkapa totuustaululla. Pyrin havainnollisesti kirjoittamaan jokaisen välivaiheen, jotta todistuksesta näkyisi, miten päättely etenee, ja perustelemaan joka vaiheen myös eksaktisti. Esimerkiksi loogisen ekvivalenssin transitiivisuuden mainitseminen perusteluna lienee kuitenkin todellisuudessa hätävarjelun liioittelua. Lisäksi usein ekvivalenttien ja tautologian sijoitussääntöä voi käyttää intuitiivisesti siihen eksplisiittisesti vetoamatta.

Muutama sana ekvivalenttien sijoitussäännöstä

Ekvivalenttien sijoitussääntö sanoo, formaalisti, että jos meillä on kaksi jonoa kaavoja $B_1, \ldots, B_n$ ja $C_1, \ldots, C_n$, joille $B_i \iff C_i$ kaikilla $i \in \{0, \ldots, n\}$, niin tällöin pätee

$$A[\bar{p}/\bar{B}] \iff A[\bar{p}/\bar{C}].$$

Intuitiivisesti siis jos meillä on vaikkapa kaava $(B_1 \wedge B_2) \to B_3$ ja tiedämme, että kaavat B_i ovat ekvivalentteja joidenkin kaavojen C_i kanssa, saamme vaihtaa kaavan B_i tilalle kaavan C_i säilyttäen ekvivalenssin, toisin sanoen siis

$$(B_1 \wedge B_2) \to B_3 \iff (C_1 \wedge C_2) \to C_3.$$

Katsotaanpa tapausta, missä meillä on kaava $(B_1 \leftrightarrow \neg\neg B_1)$. Mitä, jos haluaisimmekin vaihtaa lauseen B_1 lauseeksi C_1 vain ekvivalenssin vasemmalta puolelta emmekä lainkaan oikealta? Päätyisimme lopputulokseen $(C_1 \leftrightarrow \neg\neg B_1)$. Koska kaavat B_1 ja C_1 ovat ekvivalentit, tämän pitäisi intuitiivisesti edelleen päteä.

Jos haluaisimme korvata kaavan B_1 joka kohdasta kaavalla C_1, ajattelisimme, että meillä on kaava $A = (p_0 \leftrightarrow \neg\neg p_0)$, josta saisimme alkuperäisen kaavamme sijoituksella $A[p_0/B_1]$. Tällöin ekvivalenttien sijoitussäännön nojalla saisimme, että $A[p_0/B_1] \iff A[p_0/C_1]$, siis $(B_1 \leftrightarrow \neg\neg B_1) \iff (C_1 \leftrightarrow \neg\neg C_1)$. Mutta tätähän me emme halunneet, vaan halusimme, että

$$(C_1 \leftrightarrow \neg\neg B_1) \iff (B_1 \leftrightarrow \neg\neg B_1).$$

Sijoituksesta voi selvitä seuraavalla tempulla: ajatellaankin, että meillä on lause $A = (p_0 \leftrightarrow \neg\neg B_1)$. Nyt ekvivalenttien sijoitussäännöllä edelleenkin saadaan $A[p_0/B_1] \iff A[p_0/C_1]$, mutta koska valitsimme kaavan A paremmin, saamme konkreettisiksi kaavoiksi tällä kertaa

$$(C_1 \leftrightarrow \neg\neg B_1) \iff (B_1 \leftrightarrow \neg\neg B_1),$$

mikä oli, mitä haluttiinkin!

Tämän esimerkin nojalla on sallittua korvata vain osa ekvivalenteista alikaavoista eikä välttämättä kaikkia.