Johdatus logiikkaan 1

Åsa Hirvonen

Kevät 2016

Sisältö

Johdanto

Logiikka on oppi päättelystä. Logiikan avulla voidaan tutkia, milloin päättely on pätevä ja milloin ei. Jotta voitaisiin matemaattisen tarkasti tutkia päättelyitä ja niiden rajoitteita, on ensin määriteltävä mitä päättely on ja mitä pätevällä päättelyllä tarkoitetaan. Tämän jälkeen voidaan tutkia sekä päättelyn mahdollisuuksia että rajoituksia ja myös saada malli päättelyprosessista, jota voidaan soveltaa esim. tietojenkäsittelytieteessä. Luonnollisessa kielessä esiintyy paljon erivivahteisia ilmaisuja, joiden tarkkaa merkitystä on hankala analysoida. Siispä päättelyn pohjaksi otetaan *formaali kieli*, joka yksinkertaistaa tutkittavia väitelauseita. Tällä kurssilla tutkittava *propositiologiikka* on tällainen formaali kieli. Ilmaisuvoimaltaan rikkaampi kieli on *predikaattilogiikka*, jota käsitellään kurssilla 'Johdatus logiikkaan 2'. Se soveltuu muualla matematiikassa tutkittavien rakenteiden, kuten algebrallisten ja geometristen rakennelmien, kuvailuun.

Hyvinmääritellyt formaalit kielet ja niihin liittyvät menetelmät ovat tietotekniikan perusta. Jo ennen ensimmäisten tietokoneiden rakentamista pystyttiin logiikan keinoin todistamaan niiden rajoituksia, kuten *pysähtymisongelman* ratkeamattomuus. Nykyään digitaalisen piirin suunnittelu on hyvä esimerkki propositiologiikan sovellutuksesta. Logiikan formaaleja päättelyjärjestelmiä on käytetty myös mallintaman päättelyä keinoälysovelluksia varten (vaikka myöhemmin suuremman suosion ovatkin saavuttaneet neuroverkot ja tilastolliset menetelmät). Edelleen logiikan menetelmät muodostavat työkalupakin, jolla voidaan tutkia mm. algoritmien oikeellisuutta ja ongelmien laskennallista vaativuutta.

Logiikan keskeisiä teemoja on jako syntaksiin ja semantiikkaan. Syntaksilla tarkoitetaan formaalin kielen sääntöjä: Mitä symboleja kielessä käytetään? Minkämuotoisia kaavoja symboleista voi muodostaa? Semantiikka puolestaan käsittelee tulkintaa. Propositiologiikassa semantiikka tarkoittaa yksinkertaisesti sitä, onko tutkittava lause tosi vai epätosi, kun sen osasten totuusarvot tunnetaan.

Tällä kurssilla tutustutaan propositiologiikan avulla erilaisiin menetelmiin ratkaista logiikkaan liittyviä ongelmia. Todistetaan myös menetelmien toimivuus, joskin kurssin pääpaino on menetelmien soveltamisessa.

1 Propositiolauseet

Propositiologiikassa tutkitaan sanojen *ja*, *tai*, *ei* ja *jos . . . niin* merkitystä. Merkitys määritellään niin, että esim. ja-sanaa sisältävän lauseen totuus riippuu vain sen yhdistämien väittämien totuudesta, eli lauseen 'Aapo maalaa ja Berta sahaa' totuus riippuu vain siitä, maalaako Aapo ja sahaako Berta, muttei esim. siitä, tuntevatko Aapo ja Berta toisensa.

Propositiologiikka tutkii vain väitelauseita, eli lauseita, jotka ilmaisevat jonkin asiantilan. Kysymykset, käskyt ja monet muut kieliopilliset lauseet jäävät propositiologiikan ulkopuolelle.

Propositiologiikassa pienimmät osaset ovat *atomilauseet*. Nämä koostuvat yksinkertaisista väitteistä, joita ei voida pilkkoa pienemmiksi väitelauseiksi. Esimerkkejä atomilauseista ovat:

> Sataa.
> Auto on harmaa.

Atomilauseista voidaan *konnektiivien* avulla rakentaa monimutkaisempia väitteitä. Tällä kurssilla käytetään konnektiiveja *ei*, *ja*,*tai*, *jos ... niin* sekä *jos ja vain jos*. On perusteltua kysyä, miksi rajoitutaan näihin, koska muitakin konnektiiveja voidaan määritellä. Tähän kysymykseen palataan luvussa 4, jossa osoitetaan, että nämä muodostavat 'riittävän kokoelman' (itse asiassa pienempikin kokoelma riittäisi). Siispä valinta konnektiiveksi perustuu niiden luonnollisuuteen ja yleiseen esiintyvyyteen luonnollisessa kielessä. Konnektiiveja käyttäen voidaan rakentaa yhä monimutkaisempia lauseita:

> Minä imuroin ja sinä tiskaat.
> Tulen autolla, vain jos sataa ja tuulee tai junankuljettajat lakkoilevat.

Logiikassa kiinnitetään huomiota väitelauseiden loogiseen rakenteeseen ja totuusarvoon, ei niinkään asiasisältöön. Tämän takia atomilauseet korvataan *propositiosymboleilla*

$$p_0, p_1, \dots$$

Myös konnektiiveille annetaan symbolit

Symboli	Tulkinta	Nimi
$\neg$	ei	negaatio
$\wedge$	ja	konjunktio
$\vee$	tai	disjunktio
$\rightarrow$	jos ... niin	implikaatio
$\leftrightarrow$	jos ja vain jos	ekvivalenssi

Näiden avulla voidaan annettu lause kirjoittaa muotoon, josta niiden rakenteen näkee helpommin. Voidaan esim. määritellä

p_0 Sataa.
p_1 Unohdin sateenvarjon.
p_2 Kastun.

Nyt lause *Jos sataa ja unohdin sateenvarjon, niin kastun* voidaan kirjoittaa muotoon $(p_0 \wedge p_1) \rightarrow p_2$. Hieman pessimistisempi lause *Jos unohdin sateenvarjon, niin sataa.* puolestaan saa muodon $p_1 \rightarrow p_0$.

Intuitiivisesti propositiolauseet ovat siis väitelauseita, jotka on rakennettu yksinkertaisista väitteistä käyttäen konnektiiveja *ja*, *tai*, *ei*, *jos ... niin* ja *jos ja vain jos*. Jotta voitaisiin todistaa väitteitä, jotka pätevät *kaikilla* propositiolauseilla, tarvitaan formaali määritelmä, jonka perusteella selkeästi voidaan erottaa, onko annettu merkkijono propositiolause vai ei.

Määritelmä 1.1. Propositiolauseet ovat äärellisiä propositiosymboleista $(p_0, p_1, \dots)$, konnektiiveista $(\wedge,\ \vee,\ \neg,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow)$ ja sulkumerkeistä '(' ja ')' muodostettuja merkkijonoja, jotka on muodostettu seuraavien sääntöjen mukaan:

1. Propositiosymbolit $p_0, p_1, p_2, \dots$ ovat propositiolauseita.

2. Jos A ja B ovat propositiolauseita, myös merkkijonot $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ ja $(A \leftrightarrow B)$ ovat propositiolauseita.

Ylläoleva määritelmä on esimerkki ns. *induktiivisesta* tai *rekursiivisesta* määritelmästä. Sen sijaan, että ilmaistaisiin eksplisiittisesti miltä propositiolause näyttää (mikä olisi mahdotonta), määritelmä kuvailee, miten propositiolauseet askel kerrallaan voidaan muodostaa yksinkertaisemmista lauseista tiettyjä sääntöjä noudattaen. Tarkastellaan tarkemmin tämän tyyppisiä määritelmiä ja niiden käyttöä luvussa 2.

Esimerkki 1.2. Seuraavat ovat esimerkkejä propositiolauseista:

$$\begin{array}{l} \neg\neg p_7 \\ ((p_2 \leftrightarrow p_1) \rightarrow (p_0 \vee p_1)) \\ (\neg(p_1 \rightarrow p_1) \wedge (p_2 \wedge \neg p_2)) \end{array}$$

Seuraavat *eivät* ole propositiolauseita:

$$\begin{array}{l} (p_0 \wedge \wedge p_2) \\ \rightarrow p_2 \\ p_0 \vee p_1 \\ (p_1 = p_2) \\ (p_5) \\ \text{Olli hiihtää.} \\ (p_0 \rightarrow p_1 \wedge p_2) \end{array}$$

Huomautus 1.3. Yksinkertaisuuden vuoksi jätetään usein sulkeet merkitsemättä, jos tulkinta on selvä. Niinpä kirjoitetaan usein $A \wedge B$ lauseen $(A \wedge B)$ asemesta. Formaalissa käsittelyssä tämä poisjättö on kuitenkin nähtävä lyhennysmerkintänä. Siispä $p_0 \vee p_1$ ei ole propositiolause, mutta se on lyhenne lauseelle $(p_0 \vee p_1)$. Näin voidaan kuitenkin menetellä vain, kun on selvää, minkä lauseen lyhenne annettu merkkijono on. Niinpä $A \to B \to C$ ei ole sallittu, koska on epäselvää, tarkoitetaanko sillä lausetta $((A \to B) \to C)$ vaiko $(A \to (B \to C))$. Kun tutkitaan lauseiden totuusarvoja luvussa 3, nähdään, että myös lausetta $A \wedge B \wedge C$ voidaan pitää yksikäsitteisenä, vaikkei siitä pysty sanomaan, tarkoittaako merkintä propositiolausetta $((A \wedge B) \wedge C)$ vaiko lausetta $(A \wedge (B \wedge C))$. Syy sulkeiden pois jättämisen sallimiselle on, että molemmat vaihtoehtoiset tulkinnat ovat ekvivalentit, eli niillä on sama merkitys.

Propositiolauseen tutkimisessa, sen rakenne on oleellinen. Mistä pienemmistä osista se koostuu? Missä järjestyksessä osaset on yhdistetty? Näiden ilmaisemiseen määritellään käsitteet *pääkonnektiivi* ja *alilause.*

Määritelmä 1.4. Propositiolauseen *pääkonnektiivi* on se konnektiivi, jota on käytetty viimeiseksi lauseen konstruktiossa Määritelmän 1.1 mukaan.

Esimerkki 1.5.

1. Propositiolauseen $(\neg p_0 \wedge (p_1 \to \neg p_2))$ pääkonnektiivi on konjunktio.
2. Jos tutkittava lause A on propositiosymboli, sillä ei ole pääkonnektiivia.

Määritelmä 1.6. Propositiolauseen *alilauseet* määritellään seuraavasti:
Jos A on propositiosymboli, niin A:n ainoa alilause on A.
Propositiolauseen $\neg A$ alilauseet ovat $\neg A$ ja A:n alilauseet.
Propositiolauseen $(A \wedge B)$ alilauseet ovat $(A \wedge B)$ sekä A:n ja B:n alilauseet.
Propositiolauseen $(A \vee B)$ alilauseet ovat $(A \vee B)$ sekä A:n ja B:n alilauseet.
Propositiolauseen $(A \to B)$ alilauseet ovat $(A \to B)$ sekä A:n ja B:n alilauseet.
Propositiolauseen $(A \leftrightarrow B)$ alilauseet ovat $(A \leftrightarrow B)$ sekä A:n ja B:n alilauseet.

Esimerkki 1.7. Propositiolauseen $((p_0 \to p_1) \leftrightarrow \neg p_2)$ alilauseet ovat

$$((p_0 \to p_1) \leftrightarrow \neg p_2), (p_0 \to p_1), \neg p_2, p_0, p_1, p_2.$$

Välittömät alilauseet ovat alilauseista ne, joita pääkonnektiivi yhdistää. Siten pelkästä propositiosymbolista muodostetuilla lauseilla ei ole välittömiä alilauseita.

Määritelmä 1.8. Olkoot A ja B propositiolauseita.

Lauseen $\neg A$ välitön alilause on A.
Lauseiden $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ ja $(A \leftrightarrow B)$ välittömät alilauseet ovat A ja B.

Esimerkki 1.9. Propositiolauseen $((p_2 \rightarrow p_3) \wedge \neg(p_1 \vee p_2))$ välittömät alilauseet ovat $(p_2 \rightarrow p_3)$ ja $\neg(p_1 \vee p_2)$ ja pääkonnektiivi on konjunktio. Sen alilauseet ovat

$$((p_2 \rightarrow p_3) \wedge \neg(p_1 \vee p_2)), (p_2 \rightarrow p_3), \neg(p_1 \vee p_2), (p_1 \vee p_2), p_2, p_3, p_1.$$

2 Rekursiiviset määritelmät ja induktio rakenteen suhteen

Tässä luvussa tarkastellaan lähemmin propositiolauseen määritelmän luonnetta. Onko se edes määritelmä, vai syyllistytäänkö määritelmässä kehäpäätelmään? Tässä luvussa osoitetaan, että määritelmä on pätevä ja yksikäsitteisesti määrittelee propositiolauseiden joukon. Luvussa todistetaan myös, että *induktio rakenteen suhteen* toimii. Kurssin kannalta oleellisinta on oppia käyttämään tätä induktiotodistuksen muotoa.

Ensimmäinen lähestymistapa propositiolauseen määritelmään on tutkia määritelmän antaman prosessin rajaa:

Määritellään joukot L_n $(n \in \mathbb{N})$ seuraavasti:

1. $L_0 = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$
2. $L_{n+1} = L_n \cup \{\neg A : A \in L_n\} \cup \{(A \wedge B) : A, B \in L_n\} \cup \{(A \vee B) : A, B \in L_n\} \cup \{(A \rightarrow B) : A, B \in L_n\} \cup \{(A \leftrightarrow B) : A, B \in L_n\}$

Tällöin kohta 1 vastaa propositiolauseen määritelmän (Määritelmä 1.1) kohtaa 1, joka sanoo, että kaikki propositiosymbolit ovat propositiolauseita. Kohta 2 vastaa määritelmän kohtaa 2, joka ilmaisee, että yksinkertaisemmista propositiolauseista voidaan rakentaa monimutkaisempia lisäämällä niiden eteen negaatio tai yhdistämällä kaksi propositiolausetta konnektiivilla $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ tai $\leftrightarrow$. Näin L_n koostuu niistä propositiolauseista, jotka on muodostettu lisäämällä konnektiiveja korkeintaan n askeleessa. Siten kaikki propositiolauseet ovat joukko $\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$.

Määritelmään voi ottaa myös toisen lähestymistavan, joka perustuu ns. sulkeumaoperaattoriin. Lähdetään siitä, mitä tiedetään propositiolauseista. Ne ovat annetuista symboleista koostuvia merkkijonoja. Kaikki symboleista

p_n ($n \in \mathbb{N}$), $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, (ja) koostuvat äärelliset merkkijonot muodostavat hyvinmääritellyn kokoelman ja kysymys on, voidaanko näiden joukosta rajata ne, jotka ovat propositiolauseita. Tähän vastaamiseksei määritellään tietynlaisen sulkeuman käsite:

Jos A on joukko ja f on A:ssa määritelty funktio, $f : A \to A$, ja B on A:n osajoukko, sanotaan, että B *on suljettu* f*:n suhteen*, jos kaikilla $b \in B$ pätee myös $f(b) \in B$.

Esimerkki 2.1. Tarkastellaan tapausta, jossa $A = \mathbb{N}$ ja f on funktio, jolla $f(n) = n + 2$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Nyt parilliset luonnolliset luvut ovat suljettuja f:n suhteen. Myös parittomat luonnolliset luvut ovat suljettuja f:n suhteen, kuten myöskin joukko $\mathbb{N}$, tai esim. joukko $\{n \in \mathbb{N} : n \geq 68\}$.

Idean voi yleistää useammalle funktiolle, eikä näiden tarvitse olla yksipaikkaisia:

Määritelmä 2.2. Olkoon A joukko ja $f_1, \ldots, f_n$ A:ssa määriteltyjä funktioita, $f_i : A^{n_i} \to A$ (eli jokaisella $i = 1, \ldots, n$, f_i:n paikkaluku on n_i). Olkoon $B \subseteq A$. B on *suljettu funktioiden* $f_1, \ldots, f_n$ *suhteen*, jos kaikilla $i = 1, \ldots, n$ ja kaikilla $b_1, \ldots, b_{n_i} \in B$ pätee $f_i(b_1, \ldots, b_{n_i}) \in B$.

Kuten esimerkissä 2.1 huomattiin, annettujen funktioiden suhteen suljettuja joukkoja voi olla useita. Vaihtoehtoja voi karsia vaatimalla, että joukko sisältää jonkun annetun joukon:

Esimerkki 2.3. Tarkastellaan taas tapausta, jossa $A = \mathbb{N}$ ja $f(n) = n + 2$. Tarkastellaan nyt joukkoja, jotka sisältävät alkion 0 ja ovat suljettuja f:n suhteen. Vaihtoehtoja on edelleen monta: parilliset luonnolliset luvut, koko $\mathbb{N}$ tai joukko joka koostuu parillisista luvuista sekä kaikista annettua lukua suuremmista luvuista.

Käsitteen 'suljettu annettujen funktioiden suhteen' hyödyllisyys käy paremmin ilmi, kun huomataan, että annetulle joukolle A, A:ssa määritellyille funktioille $f_1, \ldots, f_n$ ja A:n osajoukolle A_0 löytyy aina *pienin* joukko B, joka sisältää A_0:n ja on suljettu funktioiden $f_1, \ldots, f_n$ suhteen. Tässä 'pienin' tarkoittaa, että joukko on pienin niistä joukoista, jotka toteuttavat ehdon, kun joukkoja tarkastellaan A:n osajoukkojen sisältyvyysrelaation antamassa osittaisjärjestyksessä, ts. se sisältyy kaikkiin joukkoihin, joilla tuo haluttu ominaisuus on.

Lemma 2.4. *Jos A on joukko, $f_1, \ldots, f_n$ ovat A:ssa määriteltyjä funktioita, $f_i : A^{n_i} \to A$ ja $A_0 \subseteq A$, niin on olemassa pienin A:n osajoukko, joka sisältää A_0:n ja on suljettu funktioiden $f_1, \ldots, f_n$ suhteen.*

Todistus. Huomataan ensin, että tällaisia suljettuja joukkoja on olemassa, koska A itse täyttää kriteerit. Tarkastellaan sitten kokoelmaa $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(A)$, joka koostuu kaikista niistä A:n osajoukoista, jotka sisältävät A_0:n ja ovat suljettuja funktioiden $f_1, \ldots, f_n$ suhteen. Halutaan löytää joukko, joka sisältyy jokaiseen $\mathcal{B}$:n alkioon. Mutta tämä on kaikkien $\mathcal{B}$:n joukkojen leikkaus $\bigcap \mathcal{B}$. Tämä joukko sisältää joukon A_0 (koska kaikki $\mathcal{B}$:n alkiot sisältävät sen) ja se on suljettu funktioiden $f_1, \ldots, f_n$ suhteen: jos $b_1 \ldots, b_{n_i} \in \bigcap \mathcal{B}$, niin kaikilla $B \in \mathcal{B}$ pätee $b_1, \ldots, b_{n_i} \in B$ ja siten (koska B on suljettu f_i:n suhteen) $f_i(b_1, \ldots, b_{n_i}) \in B$. Eli $f_i(b_1, \ldots, b_{n_i})$ kuuluu jokaiseen $\mathcal{B}$:n alkioon ja siten näiden leikkaukseen. □

Notaatio 2.5. Jatkossa kirjoittamisen helpottamiseksi merkitään $\mathrm{cl}(A_0; f_1, \ldots, f_n)$ pienintä joukkoa, joka sisältää A_0:n ja on suljettu funktioiden $f_1, \ldots, f_n$ suhteen. (A, jossa funktiot f_i on määritelty ei näy tässä notaatiossa, koska voidaan ajatella, että joukko on luettavissa funktioista $f_1, \ldots, f_n$.)

Esimerkki 2.6. Tarkastellaan taas esimerkkiä, jossa $A = \mathbb{N}$ ja $f(n) = n+2$. Nyt pienin joukko, joka sisältää joukon $\{0\}$ ja on suljettu f:n suhteen, eli $\mathrm{cl}(\{0\}; f)$, on parillisten luonnollisten lukujen joukko.

Esimerkki 2.7. Palataan sitten propositiolauseiden määritelmään 1.1. Olkoon Σ symboleista p_n ($n \in \mathbb{N}$), $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, (ja) muodostettujen äärellisten merkkijonojen joukko. Nyt konnektiivisäännöt määrittelevät funktioita Σ:ssa: esim. $f_\wedge : \Sigma^2 \rightarrow \Sigma$, missä $f(X, Y)$ on merkkijono '$(X \wedge Y)$' kaikilla merkkijonoilla $X, Y \in \Sigma$. Propositiolauseet ovat Σ:n osajoukko, joka sisältää joukon $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ (1-ehto), on suljettu funktioiden $f_\neg, f_\wedge, f_\vee, f_\rightarrow, f_\leftrightarrow$ suhteen (2-ehto). Koska muulla tavoin muodostettuja merkkijonoja ei hyväksytä propositiolauseiksi, on propositiolauseiden joukko pienin tällainen joukko. Koska tällainen joukko (nimittäin $\mathrm{cl}(\{p_n : n \in \mathbb{N}\}; f_\neg, f_\wedge, f_\vee, f_\rightarrow, f_\leftrightarrow)$) on olemassa, ja on pienimpänä yksikäsitteinen, on propositiolauseiden joukko hyvinmääritelty.

Esimerkki 2.8. Tarkastellaan vielä klassista esimerkkiä: Pienin luonnollisten lukujen osajoukko, joka sisältää joukon $\{0\}$ ja on suljettu luonnollisten lukujen seuraajafunktion S ($S(n) = n+1$) suhteen on $\mathbb{N}$ itse, $\mathrm{cl}(\{0\}; S) = \mathbb{N}$.

Edellisen esimerkin ominaisuus on klassisen induktiotodistuksen perustana. Jos halutaan osoittaa, että kaikilla luonnollisilla luvuilla on jokin ominaisuus, riittää osoittaa, että 0:lla on kyseinen ominaisuus ja että jos n:llä on ominaisuus, niin on myös $n+1$:llä. Nimittäin tällöin ne alkiot, jotka toteuttavat ominaisuuden, muodostavat joukon $A \subseteq \mathbb{N}$, jolla pätee $0 \in A$ ja joka on suljettu seuraajafunktion suhteen. Pienin tällainen joukko on $\mathbb{N}$, joten

$\mathbb{N} \subseteq A$. Eli $A = \mathbb{N}$. Samaa todistusrakennetta voi käyttää yleisesti, aina kun halutaan osoittaa, että muotoa $\mathrm{cl}(A; f_1, \ldots, f_n)$ olevan joukon kaikki alkiot toteuttavat jonkin annetun ehdon:

Korollaari 2.9. *Olkoon A joukko, B sen osajoukko ja $f_1, \ldots, f_n$ joukossa A määriteltyjä funktioita. Jos halutaan osoittaa, että kaikki $\mathrm{cl}(B; f_1, \ldots, f_n)$:n alkiot toteuttavat jonkin ehdon P, niin riittää osoittaa, että*

1. *B:n alkiot toteuttavat ehdon P ja*
2. *jos alkiot $b_1, \ldots, b_{n_i} \in \mathrm{cl}(B; f_1, \ldots, f_n)$ toteuttavat ehdon P, niin myös alkio $f_i(b_1, \ldots, b_{n_i})$ toteuttaa P:n.*

Todistus. Olkoon $A' \subseteq \mathrm{cl}(B; f_1, \ldots, f_n)$ kaikkien niiden alkioiden joukko, jotka toteuttavat P:n. Nyt jos korollaarin ehdot 1 ja 2 pätevät, $B \subseteq A'$ ja A' on suljettu funktioiden $f_1, \ldots, f_n$ suhteen. Koska $\mathrm{cl}(B; f_1, \ldots, f_n)$ on pienin tällainen joukko, on $\mathrm{cl}(B; f_1, \ldots, f_n) \subseteq A'$. Siis $A' = \mathrm{cl}(B; f_1, \ldots, f_n)$. □

Tätä todistusmuotoa käytetään usein tällä kurssilla. Yleensä sitä kutsutaan *induktioksi rakenteen suhteen.* Näin voidaan esim. osoittaa propositiolauseille erilaisia ominaisuuksia:

Esimerkki 2.10. Osoitetaan, että jos A on propositiolause, niin siinä esiintyy yhtä monta vasenta kuin oikeaa sulkumerkkiä.

Todistus. Merkitään $V(A)$:lla A:n vasenten sulkumerkkien lukumäärää ja $O(A)$:lla A:n oikeiden sulkumerkkien lukumäärää. Osoitetaan induktiolla rakenteen suhteen, että $V(A) = O(A)$ pätee kaikillla propositiolauseilla A.

1. (alkuaskel) Jos A on propositiosymboli, niin $V(A) = 0 = O(A)$.
2. (induktioaskel)
   (a) Jos $A = \neg B$ ja $V(B) = O(B)$ (eli induktio-oletuksena oletetaan, että väite pätee B:lle), niin $V(A) = V(B) = O(B) = O(A)$.
   (b) Jos $A = (B \wedge C)$ ja $V(B) = O(B)$ sekä $V(C) = O(C)$, niin $V(A) = 1 + V(B) + V(C) = O(B) + O(C) + 1 = O(A)$.
   (c) Jos $A = (B \vee C)$ ja $V(B) = O(B)$ sekä $V(C) = O(C)$, niin $V(A) = 1 + V(B) + V(C) = O(B) + O(C) + 1 = O(A)$.
   (d) Jos $A = (B \rightarrow C)$ ja $V(B) = O(B)$ sekä $V(C) = O(C)$, niin $V(A) = 1 + V(B) + V(C) = O(B) + O(C) + 1 = O(A)$.

(e) Jos $A = (B \leftrightarrow C)$ ja $V(B) = O(B)$ sekä $V(C) = O(C)$, niin $V(A) = 1 + V(B) + V(C) = O(B) + O(C) + 1 = O(A)$.

Nyt alkuaskel (1) osoittaa, että propositiosymbolit toteuttavat ehdon 'vasempien ja oikeiden sulkumerkkien määrä on sama' ja induktioaskel (2) osoittaa, että ominaisuus säilyy funktioita $f_\neg, f_\wedge, f_\vee, f_\to, f_\leftrightarrow$ sovellettaessa (vertaa Korollaarin 2.9 ehtoon 2). Esimerkissä 2.7 todettiin, että propositiolauseiden joukko on $\mathrm{cl}(\{p_n : n \in \mathbb{N}\}; f_\neg, f_\wedge, f_\vee, f_\to, f_\leftrightarrow)$, joten Korollaarin 2.9 nojalla kaikki propositiolauseet toteuttavat ehdon $V(A) = V(O)$. $\square$

Huomataan vielä, että ylläolevassa todistuksessa induktioaskeleen (2) kohdat (2b)–(2e) ovat miltei identtiset, ja yleensä tällaiset tapaukset yhdistetään yhdeksi ehdoksi, tässä tapauksessa muotoon

2b' Jos A on muotoa $(B \wedge C), (B \vee C), (B \to C)$ tai $(B \leftrightarrow C)$ ja $V(B) = O(B)$ sekä $V(C) = O(C)$, niin $V(A) = 1 + V(B) + V(C) = O(B) + O(C) + 1 = O(A)$.

Tässä luvussa on annettu kaksi hyvin erilaista lähestymistapaa propositiolauseiden määritelmään. Toinen perustuu lauseiden konstruoimiseen konnektiivi kerralla, toinen sulkeumaoperaattoriin. Voidaan osoittaa, että nämä lähestymistavat yleisesti antavat saman lopputuloksen:

Olkoon A joukko ja $f_1, \ldots, f_m$ kokoelma A:ssa määriteltyjä funktioita, $f_k : A^{n_k} \to A$. Olkoon $B \subseteq A$. Nyt voidaan määritellä joukot B_n:

1. $B_0 = B$.
2. $B_{n+1} = B_n \cup \{f_k(b_1, \ldots, b_{n_k}) : k = 1, \ldots, m \text{ ja } b_1, \ldots, b_{n_k} \in B_n\}$

Lause 2.11. $\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n = \mathrm{cl}(B; f_1, \ldots, f_m)$.

Todistus. Ensinnäkin ehdon 1 nojalla, B sisältyy joukkoon $\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$. Ehdon 2 nojalla, $\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$ on suljettu funktioiden $f_1, \ldots, f_m$ suhteen: olkoon $k \in \{1, \ldots, m\}$ ja olkoot $b_1, \ldots, b_{n_k} \in \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$. Tällöin jokainen näistä kuuluu johonkin joukkoon B_i ja valitsemalla näiden indekseistä suurin, i', saadaan $b_1, \ldots, b_{n_k} \in B_{i'}$. Nyt ehdon 2 nojlla $f_k(b_1, \ldots, b_{n_k}) \in B_{i'+1} \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$. Siten pienimpänä suljettuna joukkona $\mathrm{cl}(B; f_1, \ldots, f_m)$ sisältyy joukkoon $\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$.

Enää tarvitsee osoittaa, että $\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \subseteq \mathrm{cl}(B; f_1, \ldots, f_m)$. Osoitetaan induktiolla n:n suhteen, että $B_n \subseteq \mathrm{cl}(B; f_1, \ldots, f_m)$.

1. Jos $n = 0$, $B_n = B_0 = B \subseteq \mathrm{cl}(B; f_1, \ldots, f_m)$.
2. Jos $B_n \subseteq \mathrm{cl}(B; f_1, \ldots, f_m)$ ja $b \in B_{n+1}$, niin joko $b \in B_n$, tai b on saatu B_n:n alkioista soveltamalla jotakin funktioista $f_1, \ldots, f_m$. Koska $\mathrm{cl}(B; f_1, \ldots, f_m)$ on suljettu näiden funktioiden suhteen, on $b \in \mathrm{cl}(B; f_1, \ldots, f_m)$. Siis joka tapauksessa $b \in \mathrm{cl}(B; f_1, \ldots, f_m)$ ja siten $B_{n+1} \subseteq \mathrm{cl}(B; f_1, \ldots, f_m)$.

Luonnollisten lukujen induktioperiaatteesta seuraa nyt, että niiden lukujen n joukko, jolla $B_n \subseteq \mathrm{cl}(B; f_1, \ldots, f_m)$, on koko $\mathbb{N}$, eli $\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \subseteq \mathrm{cl}(B; f_1, \ldots, f_m)$.

Yhdistämällä suunnat $\mathrm{cl}(B; f_1, \ldots, f_m) \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$ ja $\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \subseteq \mathrm{cl}(B; f_1, \ldots, f_m)$ saadaan $\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n = \mathrm{cl}(B; f_1, \ldots, f_m)$ □

3 Totuusjakaumat ja totuustaulut

Seuraavaksi paneudutaan propositiologiikan semantiikkaan, eli siihen, mitä propositiolauseet 'tarkoittavat'. Koska propositiologiikassa ollaan kiinnostuneita vain siitä, onko lause tosi vai ei, semantiikka määritellään yksinkertaisesti lauseiden totuusarvoilla.

Kun arvioidaan arjen väitelauseita, kuten 'Sataa.' tai 'Tuulee.', totuus määritetään tarkastelemalla ympäröivän maailman asiantiloja. Propositiologiikassa totuus määritetään antamalla propositiosymboleille *totuusarvo* 1 (tosi) tai 0 (epätosi). Propositiologiikan 'mahdolliset maailmat' ovat siten kaikki mahdolliset tavat valita propositiosymboleille totuusarvo 0 tai 1. Formaalisti tämä määritellään funktiona:

Määritelmä 3.1. *Totuusjakauma* (eng. valuation) on funktio $v : \{p_n : n \in \mathbb{N}\} \to \{0, 1\}$.

Totuusjakauma on siis funktio, joka antaa propositiosymboleille totuusarvon 0 tai 1. Huomataan, että tämä periaatteessa sallii myös 'mahdottomia maailmoja': Jos määritellään

p_0 Tänään on maanantai.
p_1 Tänään on tiistai.

niin valinta $v(p_n) = 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on matemaattisesti täysin kelvollinen totuusjakauma, vaikka todellisuudessa ei samaan aikaan voi olla sekä maanantai että tiistai. Sovelluksissa tällaiset 'mahdottomat maailmat' rajataan tarkastelusta erityisten *rajoitteiden* avulla (esim. vaatimalla, että

$v(p_0) \neq v(p_1)$, mikä alempana huomataan yhtäpitäväksi sen kanssa, että propositiolause $\neg(p_0 \leftrightarrow p_1)$ on tosi).

Jotta voidaan määritellä kaikille propositiolauseille totuusarvo, on ensin tiedettävä, miten konnektiiveja tulkitaan.

3.0.1 Negaatio

Lauseen A negaatio ilmaisee yksinkertaisesti, että A ei päde. Jos esim. merkitään lausetta 'Sataa.' propositiosymbolilla p_0, niin $\neg p_0$ ilmaisee asiantilaa 'Ei sada.' Klassisessa logiikassa määritellään siten negaatio yksinkertaisesti niin, että lauseella ja sen negaatiolla on aina eri totuusarvot. Tämän voi esittää *totuustaulukossa* seuraavasti:

A	$\neg A$
1	0
0	1

3.0.2 Konjunktio

Konjunktion merkitys on yksinkertaisesti 'ja'. Lause $A \wedge B$ on tosi tarkalleen silloin, kun sekä A että B ovat tosia.

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Konjunktion välittömiä alilauseita sanotaan *konjunkteiksi.* Konjunktio on tosi, jos sen molemmat konjunktit ovat tosia.

3.0.3 Disjunktio

Disjunktio ei ole yhtä selvä tapaus kuin konjunktio. Siinä missä 'ja'-sanalla on vai yksi merkitys luonnollisessa kielessä, 'tai'-sanalla on kaksi, ja nämä ilmenevät esim. lauseista

> Retki perutaan, jos sataa tai on liian kylmä.
> Hintaan sisältyy pulla tai leivos.

Ensimmäisen lauseen kohdalla tuskin on ajatus, että retki toteutuu, jos on sekä sateista että kylmä.Tämä on esimerkki niinsanotusta *inklusiivisesta* tai-sanan käytöstä, jossa 'sataa tai on liian kylmä' kattaa tapaukset

sataa
on liian kylmä
sataa ja on liian kylmä.

Toisessa esimerkissä sen sijaan tai-sanaa käytetään *poissulkevasti*: hintaan sisältyy pulla tai leivos, muttei molemmat. Logiikan disjunktio tarkoittaa inklusiivista 'tai'-sanaa: Lause $A \vee B$ on tosi, kunhan ainakin toinen lauseista A ja B on tosi.

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Disjunktion välittömiä alilauseita sanotaan *disjunkteiksi*. Disjunktio on siis tosi, jos ainakin toinen sen disjunkteista on tosi.

3.0.4 Implikaatio

Implikaatio on käsitteenä hieman haasteellisempi. Intuitiivisesti haluttaisiin lauseen $A \to B$ merkitsevän, että A:sta seuraa B. Mutta koska klassisen logiikan semantiikassa tarkastellaan vain lauseiden A ja B totuusarvoja, eikä lauseiden merkityksiä, joudutaan tyytymään siihen, että implikaatio ilmaisee väitettä 'jos A on tosi, niin B:kin on tosi'. Huomaa, että tämä ei kerro mitään B:n totuudesta, jos A onkin epätosi. Siispä määritellään, että implikaatio on tällöin tosi.

A	B	$A \to B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Eräs tapa ymmärtää ylläolevan taulukon kaksi alinta riviä on seuraava: Tarkastellaan lauseita

A: n on 4:llä jaollinen.
B: n on parillinen.

Nyt A:sta todellakin seuraa B:n, joten on luonnollista vaatia, että lause $A \to B$ on tosi, riippumatta n:n arvosta. Mutta tällöin valinnoilla $n = 2$ ja $n = 3$ saadaan ne taulukon rivit, joissa A on epätosi.

3.0.5 Ekvivalenssi

Ekvivalenssi kuuluu taas ongelmattomiin konnektiiveihin. $A \leftrightarrow B$ ilmaisee yksinkertaisesti, että A:lla ja B:llä on sama totuusarvo: joko molemmat ovat tosia, tai molemmat epätosia.

A	B	$A \leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

3.0.6 Lauseen totuusarvo

Nyt voidaan mielivaltaisen propositiolauseen totuusarvo määritellä induktiivisesti:

Määritelmä 3.2. Olkoon A propositiolause ja olkoon v totuusjakauma. A:n *totuusarvo*, $v(A)$, määritellään seuraavien sääntöjen mukaan:

1. Jos A on propositiosymboli p_n, niin $v(A)$ on jo määritelty.

2. Jos A on $\neg B$ ja $v(B)$ on määritelty, niin
$$v(A) = \begin{cases} 0 \text{ jos } v(B) = 1, \\ 1 \text{ jos } v(B) = 0. \end{cases}$$

3. Jos A on $(B \wedge C)$ ja $v(B)$ ja $v(C)$ on määritelty, niin $v(A) = 1$ täsmälleen silloin, kun $v(B) = v(C) = 1$ ja $v(A) = 0$ muulloin.

4. Jos A on $(B \vee C)$ ja $v(B)$ ja $v(C)$ on määritelty, niin $v(A) = 1$ kunhan ainakin toinen ehdoista $v(B) = 1$ tai $v(C) = 1$ toteutuu, ja $v(A) = 0$, jos $v(B) = v(C) = 0$.

5. Jos A on $(B \to C)$ ja $v(B)$ ja $v(C)$ on määritelty, niin $v(A) = 0$, jos $v(B) = 1$ ja $v(C) = 0$ ja $v(A) = 1$ kaikissa muissa tapauksissa.

6. Jos A on $(B \leftrightarrow C)$ ja $v(B)$ ja $v(C)$ on määritelty, niin $v(A) = 1$, jos $v(B) = v(C)$ ja 0 muulloin.

3.0.7 Totuustaulut

Yllä konnektiivien semantiikkaa havainnollistettiin *totuustauluilla.* Niiden avulla voidaan myös tutkia annetun lauseen totuusarvoja *kaikilla mahdollisilla totuusjakaumilla.* Vasemmanpuoleisissa sarakkeissa luetellaan kaikki lauseessa esiintyvät propositiosymbolit. Näistä oikealle kirjoitetaan propositiolause niin, että jokainen propositiosymboli ja konnektiivi muodostaa oman sarakkeen. Taulukon rivit vastaavat kaikkia mahdollisia lauseessa esiintyvien propositiosymboleiden totuusarvokombinaatioita. Taulukkoa täytettäessä aloitetaan näiden systemaattisesta listauksesta. Tämän jälkeen taulukkoa täytetään tutkittavan lauseen alle seuraavasti:

1. Propositiosymboleiden alle kopioidaan arvot vasemmanpuoleisista sarakkeista.

2. Totuusarvot määritetään 'sisältä ulospäin', eli aina, kun jonkin lauseen välittömien alilauseiden totuusarvot on määritetty (ja kirjoitettu niiden pääkonnektiivien alle, tai propositiosymbolin tilanteessa sen alle), lauseen totuusarvo määritetään määritelmän 3.2 nojalla ja kirjoitetaan pääkonnektiivin alle.

2-kohtaa jatketaan, kunnes tutkittavan lauseen totuusarvot on saatu määritettyä.

Esimerkki 3.3. Laaditaan totuustaulu propositiolauseelle $(\neg(p_0 \wedge p_1) \leftrightarrow (\neg p_0 \vee \neg p_1))$. Lauseessa esiintyyvät propositiosymbolit ovat p_0 ja p_1, joten aloitetaan piirtämällä taulukko ja täyttämällä propositiosymboleiden arvot taulukkoon.

p_0	p_1	$(\neg$	$(p_0$	$\wedge$	$p_1)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	p_0	$\vee$	$\neg$	$p_1))$
1	1		1		1			1			1
1	0		1		0			1			0
0	1		0		1			0			1
0	0		0		0			0			0

Sitten tarkastellaan, millä (ali)lauseilla välittömien alilauseiden totuusarvot on jo määritetty. Nämä ovat konjunktio ja oikean laidan negaatiot. Täytetään näiden totuusarvot:

p_0	p_1	$(\neg$	$(p_0$	$\wedge$	$p_1)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	p_0	$\vee$	$\neg$	$p_1))$
1	1		1	**1**	1		**0**	1		**0**	1
1	0		1	**0**	0		**0**	1		**1**	0
0	1		0	**0**	1		**1**	0		**0**	1
0	0		0	**0**	0		**1**	0		**1**	0

Seuraavaksi voidaan täyttää vasemmanpuoleisimman negaation sekä disjunktion totuusarvot:

p_0	p_1	$(\neg$	$(p_0$	$\wedge$	$p_1)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	p_0	$\vee$	$\neg$	$p_1))$
1	1	**0**	1	1	1		0	1	**0**	0	1
1	0	**1**	1	0	0		0	1	**1**	1	0
0	1	**1**	0	0	1		1	0	**1**	0	1
0	0	**1**	0	0	0		1	0	**1**	1	0

Lopulta täytetään taulukkoon ekvivalenssin, eli tutkittavan propositiolauseen, totuusarvot:

p_0	p_1	$(\neg$	$(p_0$	$\wedge$	$p_1)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	p_0	$\vee$	$\neg$	$p_1))$
1	1	0	1	1	1	**1**	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	**1**	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	**1**	1	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0	**1**	1	0	1	1	0

Huomataan, että propositiolause $(\neg(p_0 \wedge p_1) \leftrightarrow (\neg p_0 \vee \neg p_1))$ saa aina totuusarvon 1, riippumatta totuusjakaumasta. Tällaista lausetta sanotaan *tautologiaksi* (kreikan sanoista 'tauto', sama, ja 'logos', sana/idea). Arkikielessä tautologia-sanaa käytetään kuvaamaan turhaa toistoa, ja ajatuksena on, että tällainen turha toistaminen ei tuo mitään uutta informaatiota. Logiikassa tautologiat ovat kuitenkin varsin hyödyllisiä, koska niiden avulla voidaan muokata lauseita helpommin käsiteltävään muotoon. Kaksi propositiolausetta A ja B ovat *loogisesti ekvivalentit*, merkitään $A \Leftrightarrow B$, jos $v(A) = v(B)$ kaikilla totuusjakaumilla v, eli jos $A \leftrightarrow B$ on tautologia. Tautologioiden avulla voidaan siis löytää annetun propositiolauseen kansssa loogisesti ekvivalentteja lauseita.

Toinen hyödyllinen käsite on looginen seuraus. Propositiolause B on propositiolauseen A *looginen seuraus*, merkitään $A \Rightarrow B$, jos $v(B) = 1$ aina, kun $v(A) = 1$, eli kun $A \rightarrow B$ on tautologia. On syytä huomata, että $A \leftrightarrow B$ ja $A \rightarrow B$ ovat propositiolauseita, joille totuusjakauma antaa totuusarvon. Väittämät $A \Leftrightarrow B$ ja $A \Rightarrow B$ sen sijaan eivät ole propositiolauseita, vaan ylemmän tason väittämiä (tarkastelevat, mitä lauseista $A \leftrightarrow B$ ja $A \rightarrow B$ tiedetään, kun tarkastellaan kaikkia mahdollisia totuusjakaumia). Symboleja $\leftrightarrow$ ja $\Leftrightarrow$ sekä $\rightarrow$ ja $\Rightarrow$ ei siis saa sekoittaa keskenään.

Jos lause A ei ole tautologia, se voi olla joko *ristiriita*, eli aina epätosi ($v(A) = 0$ kaikilla totuusjakaumilla v) tai *kontingentti*. Kontingentti lause on sellainen, joka joillakin totuusjakaumilla on tosi, toisilla epätosi.

Esimerkki 3.4. Seuraavat lauseet ovat tautologioita

$$p_0 \lor \neg p_0$$
$$p_1 \to p_1$$
$$B \to (A \to B).$$

Seuraavat ovat ristiriitoja

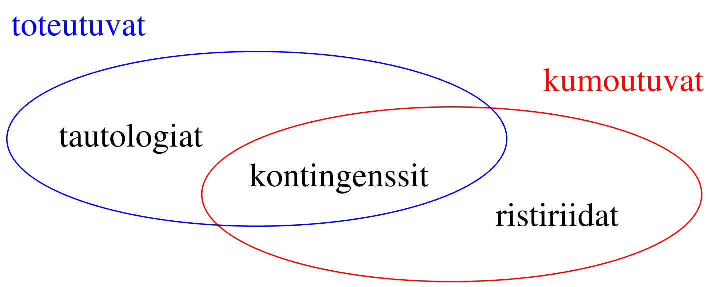
$$p_0 \land \neg p_0$$
$$A \leftrightarrow \neg A$$

Seuraavat ovat kontingentteja

$$p_0$$
$$p_1 \land p_2$$
$$p_1 \to \neg p_1$$

Propositiolause on *toteutuva*, jos se on tosi jollakin totuusjakaumalla (muttei välttämättä kaikilla). Siispä toteutuvia ovat sekä tautologiat että kontingenssit. Propositiolause on *kumoutuva*, jos se on epätosi jollakin totuusjakaumalla. Siten kumoutuvia ovat ristiriidat ja kontingenssit.

Kuvassa 1 on esitetty kaaviokuva propositiolauseiden luokittelusta toisaalta toteutuviin ja kumoutuviin, toisaalta tautologioihin, ristiriitoihin ja kontingensseihin.



Kuva 1: Kaaviokuva propositiolauseiden luokittelusta

Logiikan kannalta propositiolauseen keskeisimpiä ominaisuuksia on se, mihin kategoriaan se kuvan 1 luokittelussa kuuluu. Eräs tapa selvittää asia, on laatia lauseelle totuustaulu. Tämä ei kuitenkaan ole erityisen tehokas menetelmä: jos lauseessa on n propositiosymbolia, tauluun tulee 2^n riviä, eli taulun koko kasvaa eksponentiaalisesti propositiosymbolien lukumäärän kasvaessa. Myöhemmin tällä kurssilla tutustutaan menetelmiin tutkia propositiolauseita, jotka tosin ovat hieman vaativampia, mutta yleensä paljon hyödyllisempiä kuin totuustaulumenetelmä.

4 Totuusfunktiot

Edellisessä luvussa kuvattiin, miten mielivaltaiselle propositiolauseelle voidaan muodostaa totuustaulu. Luonnollinen jatkokysymys on, voidaanko mielivaltaiselle totuustaululle muodostaa propositiolause? Esimerkiksi, onko olemassa propositiolausetta A, joka on rakennettu käyttäen propositiosymboleita p_0, p_1 ja p_2, ja jolla on seuraava totuustaulu:

p_0	p_1	p_2	A
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

Kysymys saa hyvin käytännönläheisen muodon, kun huomataan, että monet digitaalipiireissä käytetyt loogiset portit (esim. NAND, XOR) puuttuvat propositiologiikan perustaksi valituista konnektiiveista. Voidaanko kaikki digitaalipiirit esittää propositiolauseilla? Ongelman tutkimiseksi yleisellä tasolla määritellään *totuusfunktion* käsite:

Määritelmä 4.1. *Totuusfunktio* on funktio $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, missä $n \in \mathbb{N}$.

Esimerkki 4.2. Esimerkki kaksipaikkaisesta totuusfunktiosta on:

x	y	$f(x,y)$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Totuusfunktiot ovat yleistys tavallisille konnektiiveille $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ ja $\leftrightarrow$. Jos tarkastellaan kaksipaikkaisia totuusfunktioita, huomataan, että niitä on kaikenkaikkiaan 16 kappaletta:

x	y				$\neg$					$\wedge$	$\leftrightarrow$		$\to$			$\vee$	
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Näistä voidaan helposti tunnistaa konnektiivit $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$, mutta joukossa on myös muita totuusfunktioita. Osa vastaa digitaalisissa piireissä yleisesti käytettyjä loogisia portteja, esim. Shefferin viiva (NAND):

A	B	$A \vert B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Jokainen propositiolause määrittelee totuusfunktion:

Määritelmä 4.3. Jos A on propositiolause, joka on muodostettu propositiosymboleista $p_0, \ldots, p_{n-1}$, niin voidaan määritellä A:n n-paikkainen totuusfunktio $f_A : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ kaavalla

$$f_A(x_0, \ldots, x_{n-1}) = v(A), \text{ missä } v(p_i) = \begin{cases} x_i \text{ jos } i < n, \\ 1 \quad \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tämän luvun alun kysymys voidaan nyt muotoilla: Voidaanko jokaista n-paikkaista totuusfunktiota f kohti löytää propositiolause A, niin, että $f_A = f$? Vastaus osoittautuu myönteiseksi, ja vieläpä niin, että A:n löytämiseksi on systemaattinen menetelmä.

Lemma 4.4. *Jos f on n-paikkainen totuusfunktio ($n \geq 1$), niin voidaan konstruoida propositiolause A, jossa esiintyy vain propositiosymboleja $p_1, \ldots, p_{n-1}$ ja konnektiiveja $\neg$, $\wedge$ ja $\vee$, ja jolla $f_A = f$.*

Todistus. Olkoon f n-paikkainen totuusfunktio, $n \geq 1$. Jos f on vakiokuvaus 0 (eli $f(x_0, \ldots, x_{n-1}) = 0$ kaikilla $x_1 \ldots, x_{n-1} \in \{0,1\}$), valitaan esim. $A = p_0 \wedge \neg p_0$. Jos f saa arvon 1 ainakin yhdellä n-jonolla $(x_0, \ldots, x_{n-1})$, edetään seuraavasti: Määritellään jokaista n-jonoa $\bar{x} = (x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \{0,1\}^n$ kohti lause

$$A_{\bar{x}} = (q_0 \wedge \cdots \wedge q_{n-1}), \quad \text{missä } q_i = \begin{cases} p_i & \text{jos } x_i = 1, \\ \neg p_i & \text{jos } x_i = 0. \end{cases}$$

Propositiolauseen $A_{\bar{x}}$ idea on, että $A_{\bar{x}}$ saa totuusarvon 1 tasan niillä totuusjakaumilla, joilla propositiosymbolien $p_0, \ldots, p_{n-1}$ totuusarvot muodostavat n-jonon $\bar{x}$. Olkoon sitten X niiden n-jonojen $\bar{x}$ joukko, joilla $f(\bar{x}) = 1$, eli $X = \{\bar{x} \in \{0,1\}^n : f(\bar{x}) = 1\}$. Koska oletettiin, että $f(\bar{x}) = 1$ ainakin yhdellä n-jonolla $\bar{x}$, X on epätyhjä. Olkoon sitten A disjunktio niistä propositiolauseista $A_{\bar{x}}$, joilla $\bar{x} \in X$, eli

$$A = A_{\bar{x}_1} \vee \cdots \vee A_{\bar{x}_m}, \quad \text{missä } X = \{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m\}.$$

Osoitetaan vielä, että A on halutunlainen, eli $f_A = f$: Olkoon $(d_0, \ldots, d_{n-1}) \in \{0,1\}^n$ ja olkoon v totuusjakauma, jolla

$$v(p_i) = \begin{cases} d_i & \text{jos } i < n, \\ 1 & \text{muuten,} \end{cases}$$

eli v on määritelmän 4.3 totuusjakauma, jolla $f_A(d_0, \ldots, d_{n-1}) = v(A)$. Jos nyt $f_A(d_0, \ldots, d_{n-1}) = 1$, eli $v(A) = 1$, niin jonkun A:n disjunkteista on oltava tosi. Siis jollakin $\bar{x} \in X$ pätee $v(A_{\bar{x}}) = 1$. Mutta propositiolauseet $A_{\bar{x}}$ on määritelty niin, että ainoa $A_{\bar{x}}$, jonka v toteuttaa on $A_{(d_0,\ldots,d_{n-1})}$. Täten on oltava $(d_0, \ldots, d_{n-1}) \in X$, ja X:n määritelmän nojalla tiedetään tällöin $f(d_0, \ldots, d_{n-1}) = 1$.

Toisaalta, jos $f(d_0, \ldots, d_{n-1}) = 1$, niin $(d_0, \ldots, d_{n-1}) \in X$. Tällöin $A_{(d_0,\ldots,d_{n-1})}$ esiintyy A:n disjunktina. $A_{(d_0,\ldots,d_{n-1})}$ on tosi tasan niillä totuusjakaumilla, jotka antavat p_i:lle totuusarvon d_i, siispä $v(A_{(d_0,\ldots,d_{n-1})}) = 1$ ja disjunktion totuusmääritelmän nojalla $v(A) = 1$. Tämä taas vuorostaan tarkoittaa, että $f_A(d_0, \ldots, d_{n-1}) = 1$. $\square$

Näin on todistettu, että mitä tahansa totuusfunktiota voidaan esittää propositiolauseen avulla, vieläpä käyttäen vain konnektiiveja $\neg$, $\wedge$ ja $\vee$. Siten huomataan, että vaikka konnektiiveiksi valittiin vain rajallinen joukko (ja jätettiin esim. Shefferin viiva ulkopuolelle), niin kaikki muut konnektiivit voidaan valituilla konnektiiveilla esittää.

Esimerkki 4.5. Kappaleen alussa esitettyä totuusfunktiota

p_0	p_1	p_2	A
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

vastaa nyt lause

$$(p_0 \wedge p_1 \wedge p_2) \vee (p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2) \vee (\neg p_0 \wedge p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2).$$

Lause on muodostettu lukemalla taulukosta ‘ykkösrivit’, muodostamalla niiden totuusjakaumaa vastaavat konjunktiot ja yhdistämällä nämä disjunktioilla.

4.0.8 Disjunktiivinen normaalimuoto

Edellä muodostettiin annetulle totuusfunktiolle f propositiolause A, jolle $f_A = f$. Lause oli aivan tiettyä muotoa: se oli disjunktio, jossa jokainen disjunkti oli konjunktio propositiosymboleista tai niiden negaatioista. Tällainen propositiolause on ns. *disjunktiivisessa normaalimuodossa.*

Määritelmä 4.6. Propositiolause A on *disjunktiivisessa normaalimuodossa* (eng. disjunctive normal form, DNF), jos A on muotoa

$$A_0 \vee \cdots \vee A_{n-1},$$

missä jokainen A_i on muotoa

$$q_0 \wedge \cdots \wedge q_{m_i-1}$$

ja jokainen q_i on *literaali*, eli propositiosymboli tai sellaisen negaatio.

Huomaa, että konjunktien määrä konjunktioissa voi vaihdella. Tässä sallitaan myös tapaukset, joissa m_i tai n on 1, eli joissa esiintyy vain yksi disjunkti tai konjunkti.

Koska jokainen propositiolause määrittelee totuusfunktion, on osoitettu, että jokaiselle propositiolauseelle löytyy loogisesti ekvivalentti propositiolause, joka on disjunktiivisessa normaalimuodossa. Tämä uusi lause ei kuitenkaan ole yksikäsitteinen. Jos edellä esitetyn metodin avulla muodostetaan disjunktiivisessa normaalimuodossa oleva propositiolause, joka on ekvivalentti propositiolauseen

$$p_0 \to p_1$$

kanssa, niin saadaan propositiolause

$$(p_0 \wedge p_1) \vee (\neg p_0 \wedge p_1) \vee (\neg p_0 \wedge \neg p_1).$$

Voidaan kuitenkin (esim. totuustaululla) osoittaa, että yksinkertaisempi propositiolause

$$\neg p_0 \vee p_1$$

on loogisesti ekvivalentti edellisten kanssa ja se on myös disjunktiivisessa normaalimuodossa.

4.0.9 Konjunktiivinen normaalimuoto

Toinen hyödyllinen normaalimuoto on ns. *konjunktiivinen normaalimuoto.*

Määritelmä 4.7. Propositiolause A on *konjunktiivisessa normaalimuodossa* (eng. conjunctive normal form, CNF), jos A on muotoa

$$A_0 \wedge \cdots \wedge A_{n-1},$$

missä jokainen A_i on muotoa

$$q_0 \vee \cdots \vee q_{m_i - 1}$$

ja jokainen q_i on literaali (propositiosymboli tai sellaisen negaatio).

Tässä sallitaan myös tapaukset, joissa m_i tai n on 1.

Esittämällä annetun lauseen A negaatio $\neg A$ disjunktiivisessa normaalimuodossa, ja soveltamalla *de Morganin sääntöjä* $\neg(B \vee C) \Leftrightarrow (\neg B \wedge \neg C)$ ja $\neg(B \wedge C) \Leftrightarrow (\neg B \vee \neg C)$ voidaan (induktiolla A:n disjunktiivisen normaalimuodon pituuden suhteen) osoittaa, että jokainen lause A voidaan esittää konjunktiivisessa normaalimuodossa. Tarkempi todistus jätetään harjoitustehtäväksi.

4.0.10 Täydelliset konnektiivijoukot

Edellä huomattiin, että jokaiselle propositiolauseelle A löytyy ekvivalentti disjunktiivisessa (tai konjunktiivisessa) normaalimuodossa oleva propositiolause, eli jokainen totuusfunktio (tai konnektiivi) voidaan *määritellä* konnektiivien $\neg$, $\wedge$ ja $\vee$ avulla. Konnektiivijoukkoa, jolla on tämä ominaisuus, sanotaan *täydelliseksi* (eng. universal).

Määritelmä 4.8. Joukko totuusfunktioita T on *täydellinen*, jos kaikki totuusfunktiot voidaan määritellä T:n funktioiden avulla.

$\{\neg, \wedge, \vee\}$ on siis täydellinen konnektiivijoukko. Huomaamalla, että $\vee$ voidaan määritellä konnektiivien $\neg$ ja $\wedge$ avulla

$$A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

voidaan (induktiolla) osoittaa, että jokainen totuusfunktio on esitettävissä jo konnektiivien $\neg$ ja $\wedge$ avulla, eli $\{\neg, \wedge\}$ on täydellinen. On jopa olemassa yhden konnektiivin täydellisiä konnektiivijoukkoja, esimerkki tällaisesta on $\{|\}$, missä $|$ on Shefferin viiva:

Esimerkki 4.9. Osoitetaan, että $\{|\}$ on täydellinen konnektiivijoukko.

Todistus. Olkoon f mielivaltainen totuusfunktio. Lemman 4.4 nojalla, on olemassa disjunktiivisessa normaalimuodossa oleva propositiolause A, jolla $f_A = f$. Osoitetaan induktiolla A:n rakenteen suhteen, että on olemassa A:n kanssa loogisesti ekvivalentti propositiolause A', jossa on käytetty vain Shefferin viivaa.

1. Jos A on propositiosymboli, A:ssa ei ole lainkaan konnektiiveja.

2. Induktioaskeleessa riittää tarkastella kolme kohtaa, koska A:ssa esiintyy vain konnektiiveja $\neg$, $\wedge$ ja $\vee$:

   (a) Jos $A = \neg B$ ja B' on B:n kanssa ekvivalentti propositiolause, jossa on käytetty vain Shefferin viivaa, niin huomataan ensin, että

   $$A = \neg B \Leftrightarrow \neg B'$$

   ja edelleen
   $$\neg B' \Leftrightarrow (B'|B').$$

   Siispä A':ksi voidaan valita $B'|B'$.

   (b) Jos $A = (B \wedge C)$ ja $B' \Leftrightarrow B$, $C' \Leftrightarrow C$, missä B' ja C' sisältävät konnektiiveista vain Shefferin viivaa, niin huomataan taas ensin, että
   $$A = (B \wedge C) \Leftrightarrow (B' \wedge C')$$

   ja sen jälkeen

   $$(B' \wedge C') \Leftrightarrow ((B'|C')|(B'|C')).$$

   Siispä A':ksi voidaan valita $(B'|C')|(B'|C')$.

   (c) Jos $A = (B \vee C)$ ja $B' \Leftrightarrow B$, $C' \Leftrightarrow C$, missä B' ja C' sisältävät konnektiiveista vain Shefferin viivaa, niin huomataan taas ensin, että
   $$A = (B \vee C) \Leftrightarrow (B' \vee C')$$

   ja sen jälkeen

   $$(B' \vee C') \Leftrightarrow ((B'|B')|(C'|C')).$$

   Siispä A':ksi voidaan valita $(B'|B')|(C'|C')$.

Koska $f_{A'} = f_A = f$, A' määrittelee funktion f Shefferin viivan avulla. □

Lemma 4.4 antaa siis metodin todistaa annettu konnektiivijoukko täydelliseksi. Mutta entä jos annettu konnektiivijoukko ei olekaan täydellinen, miten tämä todistetaan? Jos on osoitettava, että annetulla konnektiivijoukolla *ei voida* esittää kaikkia totuusfunktioita, riittää löytää yksikin funktio, jota ei voida esittää.

Esimerkki 4.10. Osoitetaan, että $\{\wedge, \vee\}$ ei ole täydellien.

Todistus. Osoitetaan, että konjunktiolla ja disjunktiolla ei voida esittää negaatiota, eli funktiota $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$, jolla $f(0) = 1$ ja $f(1) = 0$. Tarkemmin, osoitetaan, että jos A on propositiolause, joka sisältää vain propositiosymbolia p_0 (koska f_A:n pitää olla yksipaikkainen) ja konnektiiveja $\wedge$ ja $\vee$, niin kaikilla totuusjakaumilla v, joilla $v(p_0) = 1$, on myös $v(A) = 1$. Siten f_A on aina (yksipaikkainen funktio), jolla $f_A(1) = 1$, jolloin $f_A \neq f$. Olkoon siis v totuusjakauma, jolla $v(p_0) = 1$.

1. Jos A on propositiosymboli p_0, niin triviaalisti $v(A) = 1$.
2. (a) Jos $A = (B \wedge C)$ ja $v(B) = v(C) = 1$, niin konjunktion totuusmääritelmän nojalla $v(A) = 1$.
   (b) Jos $A = (B \vee C)$ ja $v(B) = v(C) = 1$, niin disjunktion totuusmääritelmän nojalla $v(A) = 1$.

Nyt kaikilla propositiosymbolista p_0 sekä konnektiiveista $\wedge$ ja $\vee$ muodostettavat propositiolauseet A toteuttavat $v(A) = 1$, joten funktiota f ei voi tällaisilla esittää, eikä $\{\wedge, \vee\}$ siten voi olla täydellinen. □

5 Yleisesti päättelyjärjestelmistä

Seuraavaksi tarkastellaan formaaleja todistusmenetelmiä, nk. *päättelyitä.* Päättelymenetelmiä on logiikassa useita, mutta niillä on kaikilla samat pääpiirteet: niissä lähdetään *oletuksista* ja johdetaan tarkkoja *sääntöjä* noudattaen *johtopäätös.* Päättely etenee askel kerrallaan soveltaen aina yhtä sääntöä kerrallaan. Esimerkkejä mahdollisista säännöistä on esitetty taulukossa 5. Päättelyjärjestelmien avulla päättelyä voidaan mallintaa ja tutkia. Käytännön työssä matemaatikot harvoin kirjoittavat näin tarkkoja formaaleja todistuksia, mutta mallintamalla todistuksia ne voidaan automatisoida.

Jotta päättelyjärjestelmästä olisi hyötyä, vaaditaan siltä yleensä eheyttä ja täydellisyyttä:

Määritelmä 5.1.

- Päättelyjärjestelmä on *ehyt* (eng. sound), jos sen johtopäätökset ovat aina oletusten loogisia seurauksia. Eheys ei takaa, että kaikki loogiset seuraukset voitaisiin päätellä.
- Päättelyjärjestelmä on *täydellinen* (eng. complete), jos sillä voidaan tuottaa kaikki annettujen oletusten loogiset seuraukset. Jos järjestelmä on täydellinen, muttei ehyt, se voi tuottaa myös muita kuin loogisia seurauksia.

Ihannetapauksessa päättelyjärjestelmä on sekä ehyt että täydellinen. Toisinaan joudutaan tyytymään vähempään.

- Päättelyjärjestelmä on *kumoustäydellinen* (eng. refutation complete), jos sillä voidaan tuottaa $\perp$ kaikista ristiriitaisista oletusjoukoista. Tässä $\perp$ merkitsee vakiota, jonka totuusarvo on aina 0.

Täydellisellä järjestelmällä voidaan siis tuottaa kaikki loogiset seuraukset. Kumoustäydellisellä järjestelmällä voidaan jokaisella oletusjoukolla ja lauseella tarkistaa, onko lause oletusten looginen seuraus vai ei.

Sääntö	Oletukset	Johtopäätös
Modus ponens	A, $A \to B$	B
Modus tollens	$A \to B$,$\neg B$	$\neg A$
de Morganin lait	$\neg(A \land B)$	$\neg A \lor \neg B$
	$\neg(A \lor B)$	$\neg A \land \neg B$
Konjunktion eliminointi	$A \land B$	A
	$A \land B$	B
Disjunktion tuonti	A	$A \lor B$
Resoluutio	$A \lor B$,$\neg B \lor C$	$A \lor C$

Taulukko 1: Mahdollisia päättelysääntöjä

Taulukossa 5 on esimerkkejä mahdollisista (ehyistä) päättelysäännöistä. Huomaa kuitenkin, että nämä eivät (kaikki) ole käytössä myöhemmin esiteltävissä päättelyjärjestelmissä, vaan jokaisessa päättelyjärjestelmässä on oma sallittujen sääntöjen listansa. Sääntöjen eheys on helppo tarkastaa esim. totuustaululla.

6 Resoluutio

Ensimmäisenä päättelyjärjestelmänä esitellään resoluutio. Se perustuu Archie Blaken vuonna 1937 esittämään konsensuksen käsitteeseen, josta Davis ja Putnam kehittivät todistusmenetelmän 1960. Menetelmä on yleisesti käytössä nykyajan automatisoiduissa teoreemantodistusohjelmistoissa.

Resoluutiomenetelmä perustuu yhteen ainoaan päättelysääntöön, nimittäin resoluutiosääntöön, jota sovelletaan literaaleihin p_i ja $\neg p_i$ konjunktiivisessa normaalimuodossa olevissa lauseissa.

Menetelmän taustalla on nk. ristiriitatodistuksen idea: Jos halutaan osoittaa, että kokoelmasta lauseita $\{A_1, \ldots, A_n\}$ seuraa jokin lause B, niin riittää osoittaa, että kokolma $\{A_1, \ldots, A_n, \neg B\}$ on ristiriitainen. Tällöin nimittäin ne totuusjakaumat, jotka toteuttavat lauseet $A_1, \ldots, A_n$, eivät voi toteuttaa lausetta $\neg B$, joten ne väistämättä toteuttavat lauseen B.

Menetelmällä osoitetaan siis, että annettu (konjunktiivisessa normaalimuodossa olevien lauseiden) kokoelma $A_1, \ldots, A_n$ ei ole toteutuva. Koska lause on tautologia, jos ja vain jos sen negaatio ei ole toteutuva, menetelmää voidaan käyttää tautologisuuden osoittamiseen. Konjunktiivisen normaalimuodon edellyttäminen vaikuttaa tosin vakavalta rajoitteelta - tähän mennessä on esitelty vain yksi menetelmä konjunktiivisen normaalimuodon tuottamiseen, ja siinä laaditaan lauseelle totuustaulu (jonka jälkeen joka tapauksessa nähdään, onko lause toteutuva vai ei). Luvussa 6.1 esitellään menetelmä, joka poistaa tämän esteen. Se tarjoaa laskennallisesti kevyen menetelmän tuottaa konjunktiivisessa normaalimuodossa oleva lause, joka tosin ei ole ekvivalentti alkuperäisen kanssa, mutta joka säilyttää toteutuvuuden.

Tarkastellaan konjunktiivisessa normaalimuodossa olevaa lausetta

$$A = C_1 \wedge \cdots \wedge C_n$$

missä jokainen C_i on disjunktio literaaleista

$$C_i = q_1 \vee \cdots \vee q_{m_i},$$

$q_j \in \{p_n, \neg p_n : n \in \mathbb{N}\}$. Resoluutiomenetelmää varten koodataan lauseet joukoiksi: disjunktiot C_i koodataan literaaliensa joukoksi ja konjunktiot näiden joukoiksi. Näin muodostettua konjunktiivisen normaalimuodon joukkoesitystä sanotaan *klausuulimuodoksi.*

Määritelmä 6.1. *Klausuuli* on äärellinen joukko literaaleja.

Klausuulin ajatellaan vastaavan literaaliensa disjunktiota, joten voidaan laajentaa totuusarvon käsite myös klausuuleille:

Määritelmä 6.2. Jos v on totuusjakauma, määritellään klausuulin C totuusarvo $v(C)$:

$$v(C) = 1 \text{ jos ja vain jos } v(q) = 1 \text{ jollakin } q \in C.$$

Nyt konjunktiivisessa normaalimuodossa oleva lause voidaan koodata klausuulien joukkona

$$\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$$

ja totuusarvo voidaan määritellä vastaavasti:

Määritelmä 6.3. Jos $\mathcal{C}$ on joukko klausuuleja ja v on totuusjakauma, määritellään

$$v(\mathcal{C}) = 1, \text{ jos ja vain jos } v(C) = 1 \text{ kaikilla } C \in \mathcal{C}.$$

Määritelmässä 6.2 on syytä huomata tyhjän klausuulin erikoistapaus $C = \emptyset$ (klausuulit määriteltiin äärellisiksi joukoiksi, joten tyhjä joukko on klausuuli). Määritelmän nojalla $v(\emptyset) = 0$ kaikilla totuusjakaumilla v, eli tyhjä klausuuli on ristiriita. Resoluutiossa se saa toimittaa epätoden vakion $\perp$ roolia.

Vastaavasti tyhjä klausuulikokoelma on tautologia, koska kaikki kokoelmaan kuuluvat klausuulit (joita ei ole) ovat aina tosia.

Resoluutiomenetelmässä propositiolauseiden sijasta käsitellään klausuuleja. Näihin sovelletaan *resoluutiosääntöä*:

$$\frac{C_1 \cup \{p_i\} \text{ ja } C_2 \cup \{\neg p_i\}}{C_1 \cup C_2}$$

Resoluutiotodistus määritellään nyt seuraavasti:

Määritelmä 6.4. Olkoon $\mathcal{C}$ joukko klausuuleja. Klausuulin C resoluutiotodistus joukosta $\mathcal{C}$ on jono klausuuleja $C_0, \ldots, C_m$, s.e.:

1. kaikilla $i \leq m$, joko $C_i \in \mathcal{C}$ tai C_i on päätelty resoluutiosäännöllä joistakin C_k ja C_l, missä $k, l < i$,
2. $C_m = C$.

Resoluutiotodistuksen olemassaoloa merkitään $\mathcal{C} \vdash_R C$.

Esimerkki 6.5. Osoitetaan, että resoluutiolla voidaan osoittaa nk. Modus ponens -sääntö:

Jos p_0 ja $p_0 \to p_1$, niin p_1.

Muunnetaan ensin oletukset klausuulimuotoon. Nyt $p_0 \to p_1 \Leftrightarrow \neg p_0 \vee p_1$, joten oletukset vastaavat klausuuleja $\{p_0\}$ ja $\{\neg p_0, p_1\}$. Haluttu resoluutio on:

1. $\{p_0\}$ (oletus)

2. $\{\neg p_0, p_1\}$ (oletus)

3. $\{p_1\}$ (saatu resolutiolla riveistä 1 ja 2)

Resoluutiosäännöllä tuotetaan vain loogisia seurauksia, eli resoluutio on *ehyt* (eng. sound):

Lemma 6.6. *Jos $C_0, \ldots, C_m$ on resoluutiotodistus klausuulille C_m klausuulijoukosta $\mathcal{C}$, niin C_m on klausuulijoukon $\mathcal{C}$ looginen seuraus, eli jos v on totuusjakauma, jolla $v(\mathcal{C}) = 1$, niin myös $v(C_m)$=1.*

Todistus. Tämä perustuu havaintoon, että resoluutiosääntö on ehyt. Tarkastellaan resoluutiosääntöä

$$\frac{C_1 \cup \{p_i\} \text{ ja } C_2 \cup \{\neg p_i\}}{C_1 \cup C_2}$$

Jos

$$v(C_1 \cup \{p_i\}) = v(C_2 \cup \{\neg p_i\}) = 1,$$

niin joko $v(p_i) = 1$ tai $v(p_i) = 0$. Edellisessä tapauksessa $v(\neg p_i) = 0$, joten oletuksen nojalla on oltava $v(C_2) = 1$, jolloin $v(C_1 \cup C_2) = 1$. Jälkimmäisessä tapauksessa $v(p_i) = 0$, joten oletuksen nojalla on oltava $v(C_1) = 1$, jolloin taas $v(C_1 \cup C_2) = 1$.

Nyt todistus etenee induktiolla todistuksen pituuden suhteen. Oletetaan, että v on totuusjakauma, jolla $v(\mathcal{C}) = 1$, ja osoitetaan, että kaikilla $i \leq m$, $v(C_i) = 1$.

- Jos $i = 0$, on oltava $C_0 \in \mathcal{C}$, koska ei ole olemassa aikaisempia klausuuleja, josta C_0 olisi päätelty. Siis oletuksen nojalla $v(C_0) = 1$.

- Olkoon nyt $i > 0$ ja oletetaan, että $v(C_j) = 1$ kaikilla $j < i$. Nyt on kaksi vaihtoehtoa. Joko $C_i \in \mathcal{C}$, ja oletuksen nojalla $v(C_i) = 1$, tai C_i on saatu resoluutiosäännöllä klausuuleista C_k ja C_l, missä $k, l < i$. Induktio-oletuksen nojalla $v(C_k) = v(C_l) = 1$ ja todistuksen ensimmäisen havainnon nojalla tällöin $v(C_i) = 1$.

Luonnollisten lukujen induktio-ominaisuuden nojalla väite pätee kaikille $i \leq m$, erityisesti $v(C_m) = 1$. $\square$

On syytä huomata, että resoluutio ei ole täydellinen päättelyjärjestelmä: Klausuulijoukosta $\mathcal{C}$ ei voida resoluutiolla tuottaa kaikkia klausuuleja, jotka siitä seuraa. Esimerkiksi p_0 voidaan koodata klausuulijoukoksi $\{\{p_0\}\}$. Tästä joukosta ei kuitenkaan resoluutilla voida päätellä klausuulia $\{p_0, p_1\}$, vaikka $p_0 \vee p_1$ on lauseen p_0 looginen seuraus. Sen sijaan resoluutio on *kumoustäydellinen* (eng. refutation complete): ristiriitaisesta klausuulijoukosta voidaan aina päätellä tyhjä klausuuli.

Lemma 6.7. *Resoluutio on kumoustäydellinen, eli jos $\mathcal{C}$ on ristiriitainen joukko klausuuleja, niin joukosta $\mathcal{C}$ voidaan resoluutiolla päätellä tyhjä klausuuli.*

Todistus. Todistus perustuu induktioon klausuulijoukossa esiintyvien propositiosymboleiden lukumäärän suhteen. Eli olkoon $\mathcal{C}$ ristiriitainen joukko klausuuleja ja olkoon n joukon $\mathcal{C}$ klausuuleissa esiintyvien propositiosymboleiden lukumäärä:

$$n = |\{p_i : \text{ jollakin } C \in \mathcal{C},\, p_i \in C \text{ tai } \neg p_i \in C\}|.$$

Jos $n = 0$, $\mathcal{C}$ sisältää jo tyhjän klausuulin, joten pelkkä tyhjä joukko on resoluutiopäättely joukosta $\mathcal{C}$ tyhjään joukkoon (itse $\mathcal{C}$ ei voi olla tyhjä, koska $\mathcal{C}$ oletettiin ristiriitaiseksi).

Olkoon sitten $n > 0$. Oletetaan, että väite pätee n:ää pienemmille luvuille, eli jos $\mathcal{C}'$ on ristiriitainen klausuulijoukko, jonka klausuuleissa esiintyy yhteensä $< n$ propositiosymbolia, niin $\mathcal{C}'$:sta voidaan resoluutiolla päätellä tyhjä joukko.

Olkoon p_i jokin $\mathcal{C}$:ssä esiintyvistä propositiosymboleista. Jaetaan $\mathcal{C}$ neljään erilliseen osaan $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{00} \cup \mathcal{C}_{01} \cup \mathcal{C}_{10} \cup \mathcal{C}_{11}$ seuraavasti:

- $C \in \mathcal{C}_{00}$, jos $p_i, \neg p_i \notin C$,
- $C \in \mathcal{C}_{01}$, jos $p_i \notin C$ ja $\neg p_i \in C$,
- $C \in \mathcal{C}_{10}$, jos $p_i \in C$ ja $\neg p_i \notin C$,
- $C \in \mathcal{C}_{11}$, jos $p_i, \neg p_i \in C$.

Olkoon $\mathcal{C}_{01} \times_R \mathcal{C}_{10}$ joukko, joka saadaan, kun resoluutiosääntöä sovelletaan propositiosymbolin p_i suhteen kaikkiin pareihin $C_1 \in \mathcal{C}_{01}$ ja $C_2 \in \mathcal{C}_{10}$, eli

$$\mathcal{C}_{01} \times_R \mathcal{C}_{10} = \{(C_1 \cup C_2) \setminus \{p_i, \neg p_i\} : C_1 \in \mathcal{C}_{01},\ C_2 \in \mathcal{C}_{10}\}.$$

Nyt joukon $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_{00} \cup (\mathcal{C}_{01} \times_R \mathcal{C}_{10})$ klausuulit voidaan resoluutiosäännöllä päätellä joukosta $\mathcal{C}$, ja siinä esiintyy $n-1$ propositiosymbolia. Kunhan osoitetaan, että $\mathcal{C}'$ on ristiriitainen, takaa induktio-oletus halutun resoluutiopäättelyn olemassaolon.

Tehdään vastaoletus, että $\mathcal{C}'$ on toteutuva, ja olkoon v totuusjakauma, jolla $v(\mathcal{C}') = 1$. Tällöin $v(\mathcal{C}_{00}) = 1$, koska $\mathcal{C}_{00} \subseteq \mathcal{C}'$. Myös $v(\mathcal{C}_{11}) = 1$, koska jokainen $\mathcal{C}_{11}$:n klausuuli sisältää sekä p_i:n että $\neg p_i$:n ja näistä toinen on tosi. Osoitetaan, että $v(\mathcal{C}_{01}) = 1$. Ellei, niin jollakin $C \in \mathcal{C}_{01}$ pätee $v(C) = 0$. Tällöin (koska $v(\mathcal{C}_{01} \times_R \mathcal{C}_{10}) = 1$) on oltava $v(C_2 - \{p_i, \neg p_i\}) = 1$ kaikilla $C_2 \in \mathcal{C}_{10}$ ja määrittelemällä v' niin, että $v'(p_j) = v(p_j)$, kun $i \neq j$ ja $v'(p_i) = 0$ saadaan $v'(\mathcal{C}) = 1$, mikä on ristiriita (koska $\mathcal{C}$ ei ollut toteutuva). Siis on oltava $v(\mathcal{C}_{01}) = 1$. Mutta vastaavasti voidaan osoittaa, että $v(\mathcal{C}_{10}) = 1$, jolloin v toteuttaa $\mathcal{C}$:n, mikä taas on ristiriita. Siis $\mathcal{C}'$ ei voi olla toteutuva. □

Lause 6.8. *Klausuulijoukko $\mathcal{C}$ on ristiriitainen jos ja vain jos $\mathcal{C} \vdash_R \emptyset$.*

Todistus. Jos $\mathcal{C}$ on ristiriitainen, niin lemman 6.7 nojalla $\mathcal{C} \vdash_R \emptyset$. Jos puolestaan $\mathcal{C} \vdash_R \emptyset$, niin lemman 6.6 nojalla tyhjä klausuuli on joukon $\mathcal{C}$ looginen seuraus. Mutta tyhjä klausuuli on aina epätosi, joten $\mathcal{C}$ ei näin ollen voi olla toteutuva. Siispä $\mathcal{C}$ on ristiriitainen. □

Esimerkki 6.9. Osoitetaan resoluution avulla, että p_3 on lauseiden $p_1 \vee p_3, \neg p_1 \vee p_2$ ja $\neg p_2 \vee p_3$ looginen seuraus. Tämä osoitetaan, osoittamalla konjunktiivisessa normaalimuodossa oleva propositiolause $(p_1 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_2 \vee p_3) \wedge \neg p_3$ ristiriitaiseksi. Tutkittava klausuulijoukko on siis

$$\{\{p_1, p_3\}, \{\neg p_1, p_2\}, \{\neg p_2, p_3\}, \{\neg p_3\}\}.$$

Osoitetaan tämä ristiriitaiseksi resoluutiolla:

1. $\{p_1, p_3\}$
2. $\{\neg p_1, p_2\}$
3. $\{\neg p_2, p_3\}$
4. $\{\neg p_3\}$
5. $\{p_3, p_2\}$ (rivit 1 ja 2)
6. $\{p_3\}$ (rivit 3 ja 5)
7. $\emptyset$ (rivit 4 ja 6)

Kertauksena: loogisen seurauksen todistamiseksi resoluutiomenetelmällä

1. käännä oletukset konjunktiiviseen normaalimuotoon (ja siitä klausuulimuotoon),
2. lisää klausuuliksi vielä väitetyn johtopäätöksen negaatio,
3. sovella resoluutiosääntöä näin saatuihin klausuuleihin, kunnes saavutat tyhjän joukon (tai uusia klausuuleja ei enää muodostu).

Voidaan osoittaa, että propositiologiikassa resoluutiomenetelmä aina päättyy äärellisen monessa askeleessa, joko niin, että saadaan tyhjä klausuuli, tai sen takia, ettei uusia klausuuleja enää resoluutiosääntöä soveltamalla voida muodostaa.

6.1 Lisää konjunktiivisesta normaalimuodosta

Resoluutio on varsin suoraviivainen todistusmenetelmä. Tähän mennessä sen suurin haitta näyttää olevan, että se edellyttää konjunktiivista normaalimuotoa käsiteltäviltä lauseilta. Yksinkertaisten lauseiden kohdalla konjunktiivinen normaalimuoto voidaan löytää soveltamalla sopivia loogisia ekvivalensseja ($A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$, kaksoisnegaation poisto, de Morganin säännöt, distributiivisuus $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$). Systemaattisena menetelmänä on esitetty vain totuustauluun perustuva menetelmä.

Jos kuitenkin joustetaan vaatimuksista, eikä etsitäkään ekvivalenttia muotoa, vaan sellaista, joka säilyttää toteutuvuuden, löytyy tehokkaampi menetelmä (lineaarisessa ajassa laskettava). Resoluutiomenetelmän kannalta toteutuvuuden säilyttäminen riittää, koska menetelmä perustuu ristiriidan osoittamiseen:

$$A \Rightarrow B \text{ joss } A \wedge \neg B \vdash_R \emptyset,$$

missä A ja $\neg B$ ovat konjunktiivisessa normaalimuodossa.

Jos jokaiselle propositiolauseelle A voidaan muodostaa propositiolause A^* siten, että A^* on toteutuva, jos ja vain jos A on toteutuva, tätä voidaan käyttää resoluution yleistämiseen:

$$\begin{aligned} A \Rightarrow B &\text{ joss `}A \wedge \neg B \text{ ei ole toteutuva}' \\ &\text{ joss `}(A \wedge \neg B)^* \text{ ei ole toteutuva}' \\ &\text{ joss } (A \wedge \neg B)^* \vdash_R \emptyset. \end{aligned}$$

Määritelmä 6.10. Olkoon A propositiolause, jossa esiintyy vain propositiosymboleja $p_0, \ldots, p_{n-1}$. Määritellään klausuulikokoelma $\mathcal{C}_A$ seuraavasti:

Jokaiselle A:n alilauseelle B (lause A mukaanlukien) määritellään uusi propositiosymboli q_B (nämä ovat siis muotoa p_i, jollakin $i \geq n$, mutta selvyyden vuoksi käytetään niistä merkintää q_B). Joukkoon $\mathcal{C}_A$ tulevat seuraavat klausuulit

1. $\{q_B, \neg p_i\}$, $\{\neg q_B, p_i\}$, jos B on propositiosymboli p_i,
2. $\{q_B, q_C\}$, $\{\neg q_B, \neg q_C\}$, jos $B = \neg C$,
3. $\{\neg q_B, q_{C_1}, q_{C_2}\}$, $\{q_B, \neg q_{C_1}\}$, $\{q_B, \neg q_{C_2}\}$, jos $B = C_1 \vee C_2$,
4. $\{\neg q_B, q_{C_1}\}$, $\{\neg q_B, q_{C_2}\}$, $\{q_B, \neg q_{C_1}, \neg q_{C_2}\}$, jos $B = C_1 \wedge C_2$,
5. $\{\neg q_B, \neg q_{C_1}, q_{C_2}\}$, $\{q_B, q_{C_1}\}$, $\{q_B, \neg q_{C_2}\}$, jos $B = C_1 \rightarrow C_2$,
6. $\{\neg q_B, q_{C_1}, \neg q_{C_2}\}$, $\{\neg q_B, \neg q_{C_1}, q_{C_2}\}$, $\{q_B, q_{C_1}, q_{C_2}\}$, $\{q_B, \neg q_{C_1}, \neg q_{C_2}\}$, jos $B = C_1 \leftrightarrow C_2$,
7. $\{q_A\}$.

Havainnollistetaan menetelmää esimerkin avulla.

Esimerkki 6.11. Tarkastellaan propositiolausetta $(p_0 \wedge \neg p_1) \rightarrow p_2$. Lauseen alilauseet ovat propositiosymbolien p_0, p_1 ja p_2 lisäksi

$$\begin{array}{l} \neg p_1 \\ p_0 \wedge \neg p_1 \\ (p_0 \wedge \neg p_1) \rightarrow p_2. \end{array}$$

Otetaan käyttöön uudet propositiosymbolit q_B kaikille alilauseille B ja lisätään vastaavat klausuulit kokoelmaan:

Propositiosymboli	Vastaavat klausuulit
q_{p_0}	$\{q_{p_0}, \neg p_0\}, \{\neg q_{p_0}, p_0\}$
q_{p_1}	$\{q_{p_1}, \neg p_1\}, \{\neg q_{p_1}, p_1\}$
q_{p_2}	$\{q_{p_2}, \neg p_2\}, \{\neg q_{p_2}, p_2\}$
$q_{\neg p_1}$	$\{q_{\neg p_1}, q_{p_1}\}, \{\neg q_{\neg p_1}, \neg q_{p_1}\}$
$q_{p_0 \wedge \neg p_1}$	$\{\neg q_{p_0 \wedge \neg p_1}, q_{p_0}\}, \{\neg q_{p_0 \wedge \neg p_1}, q_{\neg p_1}\}, \{q_{p_0 \wedge \neg p_1}, \neg q_{p_0}, \neg q_{\neg p_1}\}$
$q_{(p_0 \wedge \neg p_1) \rightarrow p_2}$	$\{\neg q_{(p_0 \wedge \neg p_1) \rightarrow p_2}, \neg q_{p_0 \wedge \neg p_1}, q_{p_2}\}, \{q_{(p_0 \wedge \neg p_1) \rightarrow p_2}, q_{p_0 \wedge \neg p_1}\}, \{q_{(p_0 \wedge \neg p_1) \rightarrow p_2}, \neg q_{p_2}\}$
"q_A"	$\{q_{(p_0 \wedge \neg p_1) \rightarrow p_2}\}$

Nyt lausetta $(p_0 \wedge \neg p_1) \to p_2$ vastaava klausuulikokoelma on

$$\{q_{p_0}, \neg p_0\}, \{\neg q_{p_0}, p_0\}, \{q_{p_1}, \neg p_1\}, \{\neg q_{p_1}, p_1\}, \{q_{p_2}, \neg p_2\}, \{\neg q_{p_2}, p_2\},$$
$$\{q_{\neg p_1}, q_{p_1}\}, \{\neg q_{\neg p_1}, \neg q_{p_1}\}\{\neg q_{p_0 \wedge \neg p_1}, q_{p_0}\}, \{\neg q_{p_0 \wedge \neg p_1}, q_{\neg p_1}\}, \{q_{p_0 \wedge \neg p_1}, \neg q_{p_0}, \neg q_{\neg p_1}\}$$
$$\{\neg q_{(p_0 \wedge \neg p_1) \to p_2}, \neg q_{p_0 \wedge \neg p_1}, q_{p_2}\}, \{q_{(p_0 \wedge \neg p_1) \to p_2}, q_{p_0 \wedge \neg p_1}\}, \{q_{(p_0 \wedge \neg p_1) \to p_2}, \neg q_{p_2}\},$$
$$\{q_{(p_0 \wedge \neg p_1) \to p_2}\}$$

Lause 6.12. *Propositiolause A on toteutuva jos ja vain jos yllä määritelty klausuulikokoelma $\mathcal{C}_A$ on toteutuva.*

Todistus. Oletetaan ensin, että A on toteutuva. Olkoon v totuusjakauma, jolla $v(A) = 1$. Nyt voidaan määritellä totuusjakauma v' niin, että $v'(q_B) = v(B)$ kaikilla A:n alilauseilla B:

1. Jos p_i ei ole mikään uusista propositiosymboleista q_B, niin $v'(p_i) = v(p_i)$. Erityisesti $v'(p_i) = v(p_i)$ kaikilla A:ssa esiintyvillä propositiosymboleilla.

2. Uusille propositiosymboleille q_B, totuusarvo $v'(q_B)$ määritellään induktiivisesti:

   (a) Jos $B = p_i$, $v'(q_B) = v(p_i)$,

   (b) Jos $B = \neg C$ ja $v'(q_C)$ on määritelty, $v'(q_B) = v'(\neg q_C)$,

   (c) Jos $B = C_1 \wedge C_2$ ja $v'(q_{C_1})$ ja $v'(q_{C_2})$ on määritelty, $v'(q_B) = v'(q_{C_1} \wedge q_{C_2})$,

   (d) Jos $B = C_1 \vee C_2$ ja $v'(q_{C_1})$ ja $v'(q_{C_2})$ on määritelty, $v'(q_B) = v'(q_{C_1} \vee q_{C_2})$,

   (e) Jos $B = C_1 \to C_2$ ja $v'(q_{C_1})$ ja $v'(q_{C_2})$ on määritelty, $v'(q_B) = v'(q_{C_1} \to q_{C_2})$,

   (f) Jos $B = C_1 \leftrightarrow C_2$ ja $v'(q_{C_1})$ ja $v'(q_{C_2})$ on määritelty, $v'(q_B) = v'(q_{C_1} \leftrightarrow q_{C_2})$.

Nyt on suoraviivaista käydä määritelmän 6.10 klausuulit läpi ja tarkistaa, että kaikki kohtien 1-7 nojalla lisätyt klausuulit toteutuvat totuusjakaumalla v'.

Toista suuntaa varten oletetaan, että $\mathcal{C}_A$ on toteutuva. Olkoon v totuusjakauma, jolla $v(\mathcal{C}_A) = 1$. Nyt voidaan induktiolla osoittaa, että $v(B) = v(q_B)$ pätee kaikilla A:n alilauseilla B (yksityiskohdat jätetään harjoitustehtäväksi). Oletuksen nojalla v toteuttaa klausuulin $\{q_A\}$, joten $v(A) = 1$. $\square$

7 Luonnollinen päättely

Seuraavaksi tutustutaan luonnolliseen päättelyyn. 'Luonnollinen' tarkoittaa, että päättely pyrkii jäljittelemään inhimillistä päättelyä ja intuitiota konnektiivien merkityksestä. Koska päättely formaalina menetelmänä kuitenkin perustuu rajallisen sääntökokoelman tarkkaan soveltamiseen päättelyaskel kerrallaan, lopputulos on useimmiten paljon pikkutarkempi kuin ne todistukset, joita matematiikassa ylensä näkee.

7.1 Luonnollinen päättely käytännössä

Luonnollinen päättely perustuu konnektiivien tuonti- ja eliminointisääntöihin. Se kirjoitetaan yleensä muodossa, jossa jokaista päättelyaskelta vastaa vaakasuora viiva. Oletukset kirjataan viivan yläpuolelle ja säännön johtopäätös viivan alapuolelle. Viivan oikealla puolella ilmoitetaan, mitä päättelysääntöä sovellettiin:

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B} \wedge \mathrm{T}$$

Ylläolevassa päätelyaskeleessa '$\wedge T$' merkitsee konjunktion tuontia. Intuitiivisesti päättelysääntö ilmaisee, että jos A ja B ovat tosia, niin myös lause $A \wedge B$ on tosi. Käyttämällä päättelysääntöjen johtopäätöksiä seuraavan säännön oletuksina, rakentuu puumuotoisia *päättelyitä*. Alla on päätelty $(A \wedge B) \wedge A$ oletuksista A ja B:

$$\frac{\dfrac{A \qquad B}{A \wedge B} \wedge \mathrm{T} \qquad A}{(A \wedge B) \wedge A} \wedge \mathrm{T}$$

Päättelyn johtopäätös on sen viimeisen päättelyaskeleen johtopäätös. Päättelyn oletukset ovat ne päättelyssä esiintyvät oletukset, jotka eivät ole aikaisempien sääntöjen johtopäätöksiä. Jos on olemassa päättely oletuksista $A_0, \ldots, A_{n-1}$ johtopäätökseen B, kirjoitetaan $\{A_0, \ldots, A_{n-1}\} \vdash B$. Jos oletusjoukko on ryhjä, kirjoitetaan lyhyesti $\vdash B$. Jos $\mathcal{S}$ on (mahdollisesti ääretön) joukko propositiolauseita, $\mathcal{S} \vdash B$ tarkoittaa, että on olemassa päättely, jonka johtopäätös on B ja jonka oletukset ovat joukossa $\mathcal{S}$.

Käydään seuraavaksi luonnollisen päättelyn 10 sääntöä läpi ja tarkastellaan niihin liittyviä erityistapauksia. Säännöt on koottu myös taulukkoon 2. Sääntöjä tarkastellessa on hyvä muistaa, että säännöt on valittu niin, että ne säilyttävät lauseiden totuuden kaikilla totuusjakaumilla.

7.1.1 Konjunktion säännöt

Konjunktion tuontisääntöä

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B}\wedge\mathrm{T}$$

tarkasteltiin jo yllä. Toinen konjunktioon liittyvä sääntö on eliminointisääntö, joka itse asiassa on kaksi sääntöä:

$$\frac{A \wedge B}{A}\wedge\mathrm{E} \qquad \frac{A \wedge B}{B}\wedge\mathrm{E}$$

Näissä ideana on, että jos tiedetään lauseen $A \wedge B$ olevan totta, niin sekä A että B ovat tosia. Koska yhdellä päättelysäännöllä on kuitenkin yksi yksikäsitteinen johtopäätös, tarvitaan eri sääntöjä tilanteessa, jossa konjunktiosta halutaan päätellä ensimmäinen konjunkti (yllä A), ja tilanteessa, jossa halutaan päätellä jälkimmäinen konjunkti (yllä B).

Huomaa, että päättey on *syntaktinen* menetelmä, jossa propositiolauseita käsitellään merkkijonoina. Siten oletuksia ei saa muuttaa ekvivalenttiin muotoon, vaan varsin triviaalitkin ekvivalenssimuunnokset edellyttävät oman päättelynsä, kuten esim. $\{A \wedge B\} \vdash B \wedge A$.

Esimerkki 7.1. Päätellään $B \wedge A$ oletuksesta $A \wedge B$:

$$\frac{\dfrac{A \wedge B}{B}\wedge\mathrm{E} \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\wedge\mathrm{E}}{B \wedge A}\wedge\mathrm{T}$$

7.1.2 Disjunktion säännöt

Disjunktion tuontisääntö on intuitiivisesti varsin selkeä: jos tiedetään, että A on tosi, niin myös $A \vee B$ on tosi. Koska disjunktio halutaan voida tuoda sekä oletuksen oikealle että sen vasemmalle puolelle tarvitaan kaksi sääntöä:

$$\frac{A}{A \vee B}\vee\mathrm{T} \qquad \frac{B}{A \vee B}\vee\mathrm{T}$$

Disjuntion eliminointisääntö on hieman hankalampi, koska se sisältää *tilapäisiä oletuksia*. Sen ideaa voidaan havainnollistaa tarkastelemalla seuraavaa esimerkkiä:

Esimerkki 7.2. Osoitetaan, että kaikilla luonnollisilla luvuilla n luku n^2+n on parillinen. Olkoon siis n luonnollinen luku. Nyt n on parillinen tai pariton.

Jos n on parillinen, se on muotoa $2k$ jollakin luonnollisella luvulla k. Tällöin

$$n^2 + n = 4k^2 + 2k = 2(2k^2 + k)$$

joten $n^2 + n$ on parillinen.

Jos taas n on pariton, niin n on muotoa $2k + 1$ jollakin luonnollisella luvulla k. Tällöin

$$n^2 + n = 4k^2 + 4k + 1 + 2k + 1 = 2(2k^2 + 3k + 1)$$

ja luku $n^2 + n$ on taas parillinen.

Ei tiedetä, onko n parillinen vai pariton, mutta joka tapauksessa $n^2 + n$ on parillinen.

Disjunktion eliminointisääntö on yleinen muoto ylläolevankaltaiselle päättelylle:

$$\frac{A \vee B \qquad \begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B] \\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C} \vee \mathrm{E}$$

Jos tiedetään, että $A \vee B$ on tosi, niin joko A on tosi, tai B on tosi (tai molemmat, mutta se sisältyi jo ensimmäiseen tapaukseen). Jos molemmista vaihtoehdoista voidaan päätellä sama johtopäätös, kumpaakaan oletusta A tai B ei tarvita, vaan tiedetään, että kunhan $A \vee B$ on totta, myös pääteltävä lause (säännössä C) on tosi. Tämän vuoksi säännössä sallitaan tilapäisten oletusten A ja B *hylkääminen*, mikä merkataan hakasulkeilla hylättyjen oletusten ympärillä. Hylättyä oletusta ei enää lasketa päättelyn oletukseksi.

7.1.3 Implikaation säännöt

Implikaation eliminointi on klassinen Modus ponens -sääntö. Jos A ja $A \to B$, niin B:

$$\frac{A \to B \qquad A}{B} \to \mathrm{E}$$

Implikaation tuonnissa käytetään taas tilapäistä oletusta. Ideana on, että jos lauseesta A voidaan päätellä B, niin $A \to B$ on totta riippumatta siitä, päteekö A. Jos A on totta, niin päättely A:sta B:hen osoittaa, että B on tosi, jolloin $A \to B$ on totta. Jos taas A on epätosi, niin $A \to B$ on joka tapauksessa tosi.

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ B\end{array}}{A \to B} \to \mathrm{T}$$

Esimerkki 7.3. Osoitetaan $\{A \vee B, A \to C, B \to C\} \vdash C$. Voidaan ajatella, että todistus etenee tapauksittain: Jos A tai B on tosi, niin joko A on tosi tai B on tosi. Oletetaan sitten hetkeksi, että A on tosi. Tällöin A ja $A \to C$ ovat tosia, ja voidaan implikaation eliminointisäännöllä päätellä

$$\dfrac{A \to C \qquad A}{C} \to \mathrm{E}$$

Toisaalta, jos B on tosi, niin voidaan päätellä

$$\dfrac{B \to C \qquad B}{C} \to \mathrm{E}$$

Oletusten perusteella ei voida sanoa, kumpi A:sta ja B:stä on tosi. Mutta koska $A \vee B$ on tosi, jommankumman on oltava tosi, ja molemmista saadaan sama johtopäätös C. Ei siis tarvita tietoa siitä, kumpi lauseista A ja B on tosi (vaan tilapäiset oletukset voidaan hylätä), kunhan $A \vee B$ on tosi. Näin saadaan päättely

$$\dfrac{A \vee B \qquad \dfrac{A \to C \qquad [A]^1}{C} \to \mathrm{E} \qquad \dfrac{B \to C \qquad [B]^1}{C} \to \mathrm{E}}{C} \vee \mathrm{E}, 1$$

Tilapäisten oletusten hylkäämisen yhteydessä merkitään yleensä minkä säännön nojalla oletus on hylätty. Tämä tehdään numeroimalla hylkäykset ja merkitsemällä järjestysnumero sekä säännön viereen että hylkäystä osoittavien hakasulkeiden yhteyteen.

7.1.4 Ekvivalenssin säännöt

Ekvivalenssi käyttäytyy säännöissä oleellisesti kuin kaksi implikaatiota. Siten ekvivalenssin eliminoinnissa voidaan käyttää kumpaa suuntaa vain ekvivalenssinuolesta ja saadaan kaksi sääntöä:

$$\frac{A \leftrightarrow B \qquad A}{B} \leftrightarrow \mathrm{E} \qquad \frac{A \leftrightarrow B \qquad B}{A} \leftrightarrow \mathrm{E}$$

Ekvivalenssin tuonnissa idea on sama kuin implikaation tuonnissa, mutta nyt pitää varmistaa molempien suuntien pätevyys. Eli jos A:sta voidaan päätellä B *ja* B:stä voidaan päätellä A, niin voidaan tuoda ekvivalenssi ja hylätä tilapäiset oletukset A ja B.

$$\frac{\begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B] \\ \vdots \\ A\end{matrix}}{A \leftrightarrow B} \leftrightarrow \mathrm{T}$$

7.1.5 Negaation säännöt

Negaation säännöistä eliminointi on suoraviivaisin. Se yksinkertaisesti sallii kaksoisnegaation poiston:

$$\frac{\neg\neg A}{A} \neg\,\mathrm{E}$$

Negaation tuonti vastaa vastaoletustodistusta: Tavoitteena on osoitta $\neg A$. Tehdään vastaoletus, että A on tosi, ja johdtaan tästä ristiriita. Silloin voidaan päätellä, että A on mahdoton, ja $\neg A$:n on oltava tosi. Koska A on mahdottomuus, se voidaan hylätä oletuksista.

$$\frac{\begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ B \wedge \neg B\end{matrix}}{\neg A} \neg\,\mathrm{T}$$

Negaation tuonnissa sääntöjen syntaktinen luonne näkyy jälleen. Negaation eliminointisääntö edellyttää, että ristiriita on nimenomaan muodossa $B \wedge \neg B$, esimerkiksi $\neg B \wedge B$ ei kelpaa (mutta kylläkin $\neg B \wedge \neg\neg B$).

7.1.6 Tilapäisten oletusten hylkäämisestä

On syytä huomata, että säännöt $\vee$E, $\rightarrow$T, $\leftrightarrow$T ja $\neg$T *sallivat* oletusten hylkäämisen, mutteivät *edellytä* sitä. Sääntöjä voidaan siten soveltaa lyhennetyssä muodossa, jos hylättävää ei ole:

$$\dfrac{B}{A \to B}\ {\scriptstyle \to \mathrm{T}}$$

Seuraavassa päättelyssä implikaation eliminointisäännön kohdalla olisi peräti kaksi ehdokasta hylättäväksi oletukseksi. Kumpaakaan niistä ei kuitenkaan hylätä, koska niitä ei tuoda implikaation etujäseneksi. Säännössä saa siis hylätä vain sen lauseen, joka tuodaan implikaation etujäseneksi, eikä mitään muuta. Vastaava pätee kaikkiin hylkäämistä salliviin sääntöihin.

Esimerkki 7.4. Osoitetaan, että $\{A, A \to B\} \vdash C \to B$:

$$\dfrac{\dfrac{A \to B \qquad A}{B}\ {\scriptstyle \to \mathrm{E}}}{C \to B}\ {\scriptstyle \to \mathrm{T}}$$

7.1.7 Yhteenveto

Taulukkoon 2 on koottu luonnollisen päättelyn säännöt.

Näytetään vielä muutama esimerkki päättelystä. Näissä päättelyissä päätellään toinen de Morganin laeista:

Esimerkki 7.5. Osoitetaan $\{\neg A \vee \neg B\} \vdash \neg(A \wedge B)$.

$$\dfrac{\neg A \vee \neg B \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^1}{A}\ {\scriptstyle \wedge \mathrm{E}} \qquad [\neg A]^3}{A \wedge \neg A}\ {\scriptstyle \wedge \mathrm{T}}}{\neg(A \wedge B)}\ {\scriptstyle \neg \mathrm{T},\, 1} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^2}{B}\ {\scriptstyle \wedge \mathrm{E}} \qquad [\neg B]^3}{B \wedge \neg B}\ {\scriptstyle \wedge \mathrm{T}}}{\neg(A \wedge B)}\ {\scriptstyle \neg \mathrm{T},\, 2}}{\neg(A \wedge B)}\ {\scriptstyle \vee \mathrm{E},\, 3}$$

Esimerkki 7.6. Osoitetaan $\{\neg(A \wedge B)\} \vdash \neg A \vee \neg B\cdot$

Päättelyn idea on seuraava: Huomataan, että jos oletetaan sekä A että B, niin voidaan ristiriitatodistuksella ($\neg$T -säännöllä) päätellä $\neg A$ ja samalla hylätä oletus A. Tästä on helppo päätellä $\neg A \vee \neg B$. Mutta tällöin B:tä ei saada hylättyä. Toisaalta on helppo päätellä $\neg A \vee \neg B$ oletuksesta $\neg B$. Jos siis hetkeksi oletetaan, että voidaan päätellä $B \vee \neg B$ jollakin päättelyllä $\begin{matrix}\mathcal{P} \\ B \vee \neg B\end{matrix}$, niin saadaan:

Konnektiivi	Tuonti	Eliminointi
Konjunktio	$\dfrac{A \qquad B}{A \wedge B}\,\wedge\,\mathrm{T}$	$\dfrac{A \wedge B}{A}\,\wedge\,\mathrm{E} \qquad \dfrac{A \wedge B}{B}\,\wedge\,\mathrm{E}$
Disjunktio	$\dfrac{A}{A \vee B}\,\vee\,\mathrm{T} \qquad \dfrac{B}{A \vee B}\,\vee\,\mathrm{T}$	$\dfrac{A \vee B \qquad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B]\\ \vdots\\ C\end{array}}{C}\,\vee\,\mathrm{E}$
Implikaatio	$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ B\end{array}}{A \rightarrow B}\,\rightarrow\,\mathrm{T}$	$\dfrac{A \rightarrow B \qquad A}{B}\,\rightarrow\,\mathrm{E}$
Ekvivalenssi	$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ B\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B]\\ \vdots\\ A\end{array}}{A \leftrightarrow B}\,\leftrightarrow\,\mathrm{T}$	$\dfrac{A \leftrightarrow B \qquad A}{B}\,\leftrightarrow\,\mathrm{E} \qquad \dfrac{A \leftrightarrow B \qquad B}{A}\,\leftrightarrow\,\mathrm{E}$
Negaatio	$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ B \wedge \neg B\end{array}}{\neg A}\,\neg\,\mathrm{T}$	$\dfrac{\neg\neg A}{A}\,\neg\,\mathrm{E}$

Taulukko 2: Luonnollisen päättelyn säännöt propositiologiikassa

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ B \vee \neg B\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1 \qquad [B]^2}{A \wedge B}\,\wedge\,\mathrm{T} \qquad \neg(A \wedge B)}{(A \wedge B) \wedge \neg(A \wedge B)}\,\wedge\,\mathrm{T}}{\neg A}\,\neg\,\mathrm{T},1}{\neg A \vee \neg B}\,\vee\,\mathrm{T} \qquad \dfrac{[\neg B]^2}{\neg A \vee \neg B}\,\vee\,\mathrm{T}}{\neg A \vee \neg B}\,\vee\,\mathrm{E},2$$

Nyt pitää vielä osoittaa, että päättely $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ B \vee \neg B\end{array}$ on olemassa. Se näyttää seuraavalta

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[B]^1}{B \vee \neg B}\,\vee\,\mathrm{T} \qquad [\neg(B \vee \neg B)]^2}{(B \vee \neg B) \wedge \neg(B \vee \neg B)}\,\wedge\,\mathrm{T}}{\neg B}\,\neg\,\mathrm{T},1}{B \vee \neg B}\,\vee\,\mathrm{T} \qquad [\neg(B \vee \neg B)]^2}{(B \vee \neg B) \wedge \neg(B \vee \neg B)}\,\wedge\,\mathrm{T}}{\neg\neg(B \vee \neg B)}\,\neg\,\mathrm{T},2}{B \vee \neg B}\,\neg\,\mathrm{E}$$

Huomaa, että toisen oletusten hylkäämisen kohdalla saadaan hylätä *kaikki* lauseen $\neg(B \vee \neg B)$ esiintymät edeltävässä päättelyn osassa.

Nyt on päätelty toisen de Morganin lain molemmat suunnat. Nämä voidaan yhdistää:

Esimerkki 7.7. Osoitetaan $\vdash \neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$.

Merkitään Esimerkin 7.6 päättelyä $\begin{array}{c}\neg(A \wedge B)\\ \mathcal{Q}\\ \neg A \vee \neg B\end{array}$ ja Esimerkin 7.5 päättelyä $\begin{array}{c}\neg A \vee \neg B\\ \mathcal{R}\\ \neg(A \wedge B)\end{array}$. Tällöin haluttu päättely on:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg(A \wedge B)]^1\\ \mathcal{Q}\\ \neg A \vee \neg B\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\neg A \vee \neg B]^1\\ \mathcal{R}\\ \neg(A \wedge B)\end{array}}{\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)}\ \leftrightarrow \text{T},\ 1$$

Ylläoleva esimerkki osoittaa, miten käytännössä usein joudutaan menettelemään pidempien päättelyiden kanssa. Puumaisena rakenteena päättely usein haarautuu varsin leveäksi, jolloin se ei mahdu paperille (tai liitutaululle). Tällöin päättely tehdään osissa, osat nimetään, ja lopulta yhdistetään.

7.2 Formaali määritelmä

Edellä nähtiin, mihin sääntöihin päättely perustuu ja miltä se käytännössä näyttää. Jotta päättelyä voidaan tutkia matemaattisesti (ja osoittaa sen eheys ja täydellisyys) tarvitaan formaali määritelmä.

Määritelmä 7.8. Päättelyiden $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A\end{array}$ joukko määritellään seuraavasti:

1. Triviaali päättely A (missä A on propositiolause) on päättely. Tässä tapauksessa $\mathcal{P} = \emptyset$ ja A on sekä oletus että johtopäätös.

2. Jos $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A\end{array}$ ja $\begin{array}{c}\mathcal{Q}\\ B\end{array}$ ovat päättelyitä, niin $\dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{P} & \mathcal{Q}\\ A & B\end{array}}{A \wedge B}$ on päättely.

3. Jos $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A \wedge B\end{array}$ on päättely, niin $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A \wedge B\end{array}}{A}$ ja $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A \wedge B\end{array}}{B}$ ovat päättelyitä.

4. Jos $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A\end{array}$ on päättely, niin $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A\\ \hline A\lor B\end{array}$ ja $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A\\ \hline B\lor A\end{array}$ ovat päättelyitä.

5. Jos $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A\lor B\end{array}$, $\begin{array}{c}A\\ \mathcal{Q}\\ C\end{array}$ ja $\begin{array}{c}B\\ \mathcal{R}\\ C\end{array}$ ovat päättelyitä, niin

$$\begin{array}{ccc} & [A] & [B]\\ \mathcal{P} & \mathcal{Q} & \mathcal{R}\\ A\lor B & C & C\\ \hline & C & \end{array}$$

on päättely.

6. Jos $\begin{array}{c}A\\ \mathcal{P}\\ B\end{array}$ on päättely, niin $\begin{array}{c}[A]\\ \mathcal{P}\\ B\\ \hline A\to B\end{array}$ on päättely.

7. Jos $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A\to B\end{array}$ ja $\begin{array}{c}\mathcal{Q}\\ A\end{array}$ ovat päättelyitä, niin $\begin{array}{cc}\mathcal{P} & \mathcal{Q}\\ A\to B & A\\ \hline \multicolumn{2}{c}{B}\end{array}$ on päättely.

8. Jos $\begin{array}{c}A\\ \mathcal{P}\\ B\end{array}$ ja $\begin{array}{c}B\\ \mathcal{Q}\\ A\end{array}$ ovat päättelyitä, niin $\begin{array}{cc}[A] & [B]\\ \mathcal{P} & \mathcal{Q}\\ B & A\\ \hline \multicolumn{2}{c}{A\leftrightarrow B}\end{array}$ on päättely.

9. Jos $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A\leftrightarrow B\end{array}$, $\begin{array}{c}\mathcal{Q}\\ A\end{array}$ ja $\begin{array}{c}\mathcal{R}\\ B\end{array}$ ovat päättelyitä, niin

$$\begin{array}{cc}\mathcal{P} & \mathcal{Q}\\ A\leftrightarrow B & A\\ \hline \multicolumn{2}{c}{B}\end{array} \text{ ja } \begin{array}{cc}\mathcal{P} & \mathcal{R}\\ A\leftrightarrow B & B\\ \hline \multicolumn{2}{c}{A}\end{array}$$

ovat päättelyitä.

10. Jos $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ \neg\neg A\end{array}$ on päättely, niin $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ \neg\neg A\\ \hline A\end{array}$ on päättly.

11. Jos $\begin{array}{c}A\\ \mathcal{P}\\ B\land\neg B\end{array}$ on päättely, niin $\begin{array}{c}[A]\\ \mathcal{P}\\ B\land\neg B\\ \hline \neg A\end{array}$ on päättely.

Nyt päättelylle on annettu induktiivinen määritelmä, joten voidaan osoittaa päättelylle ominaisuuksia induktiolla *päättelyn rakenteen suhteen.* Tärkein tällainen ominaisuus on eheys.

7.3 Luonnollisen päättelyn eheys

Luonnollisen päättelyn eheys tarkoittaa, että jokainen lause, joka voidaan päätellä annetusta oletusjoukosta, on näiden oletusten looginen seuraus. Näin ollen jokainen perustelu, joka voidaan verifioida luonnollisella päättelyllä, todellakin on pätevä.

Looginen seuraus määriteltiin luvussa 3 kahden lauseen väliseksi ominaisuudeksi. Määritelmä voidaan helposti yleistää:

Määritelmä 7.9. Jos $\mathcal{S}$ on joukko propositiolauseita ja A on propositiolause, niin sanotaan, että A *on joukon* $\mathcal{S}$ *looginen seuraus*, ja merkitään $S \Rightarrow A$, mikäli jokainen totuusjakauma, joka toteuttaa $\mathcal{S}$:n jokaisen lauseen, toteuttaa myös A:n. Jos $\{B\} \Rightarrow A$ merkitään lyhyemmin $B \Rightarrow A$ (näin määritelmä yksittäisen lauseen kohdalla on yhtäpitävä aikaisemman määritelmän kanssa).

Lause 7.10 (Luonnollisen päättelyn eheyslause)**.** *Jos $\mathcal{S}$ on joukko propositiolauseita ja $\mathcal{S} \vdash A$, niin $S \Rightarrow A$ (eli jokainen lause, joka joukosta $\mathcal{S}$ voidaan päätellä, on joukon looginen seuraus).*

Todistus. Osoitetaan induktiolla päättelyn $\mathcal{P}$ rakenteen suhteen, että mikäli päättelyn $\mathcal{P}$ oletukset sisältyvät joukkoon $\mathcal{S}$ ja $\mathcal{P}$:n johtopäätös on A, niin A on $\mathcal{S}$:n looginen seuraus.

1. Jos $\mathcal{P}$ on triviaali päättely A, niin A on oletus. Siten jokainen totuusjakauma, joka toteutta päättelyn $\mathcal{P}$ oletukset triviaalisti toteuttaa A:n.

2. Oletetaan (induktio-oletus), että päättelyt $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A\end{array}$ ja $\begin{array}{c}\mathcal{Q}\\ B\end{array}$ toteutavat väitteen, eli ovat ehyitä. Olkoon sitten $\mathcal{R}$ päättely $\dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{P} & \mathcal{Q}\\ A & B\end{array}}{A \wedge B}$ ja olkoon v totuusjakauma, joka toteuttaa päättelyn $\mathcal{R}$ oletukset. Tällöin v toteuttaa päättelyiden $\mathcal{P}$ ja $\mathcal{Q}$ oletukset, joten induktio-oletuksen nojalla $v(A) = 1$ ja $v(B) = 1$. Konjunktion totuusmääritelmän nojalla tällöin $v(A \wedge B) = 1$, joten $\mathcal{R}$ on ehyt.

3. Oletetaan, että päättely $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A \wedge B\end{array}$ on ehyt. Olkoon $\mathcal{Q}$ päättely $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A \wedge B\end{array}}{A}$ ja olkoon v totuusjakauma, joka toteuttaa päättelyn $\mathcal{Q}$ oletukset. Tällöin v toteuttaa päättelyn $\mathcal{P}$ oletukset, joten induktio-oletuksen nojalla $v(A \wedge B) = 1$. Mutta tällöin myös $v(A) = 1$, joten $\mathcal{Q}$ on ehyt. Vastaavasti voidaan osoittaa, että $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A \wedge B\end{array}}{B}$ on ehyt.

4. Oletetaan, että päättely $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}$ on ehyt. Olkoon $\mathcal{Q}$ päättely $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}}{A \vee B}$ ja olkoon v totuusjakauma, joka toteuttaa päättelyn $\mathcal{Q}$ oletukset. Tällöin v toteuttaa päättelyn $\mathcal{P}$ oletukset, joten induktio-oletuksen nojalla $v(A) = 1$. Disjunktion totuusmääritelmän mukaan tällöin $v(A \vee B) = 1$ ja siten $\mathcal{Q}$ on ehyt. Vastaavasti voidaan osoittaa, että $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}}{B \vee A}$ on ehyt.

5. Oletetaan, että päättelyt $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A \vee B\end{matrix}$, $\begin{matrix}A\\ \mathcal{Q}\\ C\end{matrix}$ ja $\begin{matrix}B\\ \mathcal{Q}'\\ C\end{matrix}$ ovat ehyitä. Olkoon $\mathcal{R}$ päättely

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A \vee B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[A]\\ \mathcal{Q}\\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B]\\ \mathcal{Q}'\\ C\end{matrix}}{C}$$

ja olkoon v totuusjakauma, joka toteuttaa pättelyn $\mathcal{R}$ oletukset. Tällöin v toteuttaa päättelyn $\mathcal{P}$ oletukset, joten induktio-oletuksen nojalla $v(A \vee B) = 1$. Nyt on kaksi vaihtoehtoa, joko $v(A) = 1$ tai $v(B) = 1$. Edellisessä tapauksessa v toteuttaa päättelyn $\mathcal{Q}$ oletukset (nämä ovat päättelyn $\mathcal{R}$ oletukset *ja* A), joten induktio-oletuksen nojalla $v(C) = 1$. Jälkimmäisessä tapauksessa, $v(B) = 1$, joten v toteuttaa päättelyn $\mathcal{Q}'$ oletukset, joten induktio-oletuksen nojalla $v(C)$. Koska molemmissa tapauksissa $v(C) = 1$, on päättely $\mathcal{R}$ ehyt.

6.–9. Implikaation ja ekvivalenssin tapaukset jätetään lukijalle harjoitustehtäväksi.

6. Oletetaan, että $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ \neg\neg A\end{matrix}$ on ehyt. Olkoon $\mathcal{Q}$ päättely $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ \neg\neg A\end{matrix}}{A}$ ja olkoon v totuusjakauma, joka toteutta päättelyn $\mathcal{Q}$ oletukset. Tällöin v toteuttaa päättelyn $\mathcal{P}$ oletukset, joten induktio-oletuksen nojalla $v(\neg\neg A) = 1$. Negaation totuusmääritelmän nojalla tällöin $v(\neg A) = 0$ ja $v(A) = 1$, joten $\mathcal{Q}$ on ehyt.

7. Oletetaan, että päättely $\begin{matrix}A\\ \mathcal{P}\\ B \wedge \neg B\end{matrix}$ on ehyt. Olkoon $\mathcal{Q}$ päättely $\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \mathcal{P}\\ B \wedge \neg B\end{matrix}}{\neg A}$ ja olkoon v totuusjakauma, joka toteuttaa päättelyn $\mathcal{Q}$

oletukset. Jos nyt v toteuttaisi A:n olisi induktio-oletuksen nojalla $v(B \wedge \neg B) = 1$. Tämä on kuitenkin mahdotonta, koska $B \wedge \neg B$ on ristiriita. Siis v ei voi toteuttaa lausetta A, eli on oltava $v(A) = 0$. Mutta tällöin $v(\neg A) = 1$, mikä osoittaa päättelyn $\mathcal{Q}$ ehyeksi.

$\square$

7.4 Eheyslauseen käyttö

Eheyslauseella on seuraava välitön seuraus:

Korollaari 7.11. *Jos $\mathcal{S}$ on joukko propositiolauseita, A on propositiolause ja $S \not\models A$, niin $\mathcal{S} \nvdash A$.*

Kun halutaan osoittaa, että jokin lause voidaan päätellä luonnollisella päättelyllä on yksi vaihtoehto aina päättelyn antaminen. Eheyslauseen avulla voidaan todistaa, että jotakin *ei voida* päätellä.

Esimerkki 7.12. Osoitetaan, että $\{(p_0 \leftrightarrow p_1) \leftrightarrow p_2, p_0\} \nvdash p_2$. Korollaarin 7.11 nojalla riittää osoittaa, että $\{(p_0 \leftrightarrow p_1) \leftrightarrow p_2, p_0\} \not\models p_2$. Tätä varten riittä löytää totuusjakauma, joka toteuttaa lauseet $(p_0 \leftrightarrow p_1) \leftrightarrow p_2$ ja p_0 muttei lausetta p_2.

Olkoon v seuraava totuusjakauma

$$v(p_i) = \begin{cases} 1 \text{ jos } i = 0 \\ 0 \text{ muulloin.} \end{cases}$$

Nyt $v(p_0 \leftrightarrow p_1) = 0 = v(p_2)$, joten $v((p_0 \leftrightarrow p_1) \leftrightarrow p_2) = v(p_0) = 1$ mutta $v(p_2) = 0$.

Esitellään vielä hieman arkisempi esimerkki:

Esimerkki 7.13. Aapelia syytetään karkin pihistämisestä. Hän puolustautuu seuraavasti:

> Jos olisin pöydän alla piilossa syömässä karkkeja, olisin vienyt ne.
> Kuten huomaat, en ole pöydän alla.
> Siispä on selvää, etten ole vienyt karkkeja.

Nyt voidaan eheyslauseen avulla osoittaa, että Aapelin puolustus on epäpätevää päättelyä. Formalisoidaan tilanne seuraavasti

p_0 Aapeli on pöydän alla syömässä karkkeja.
p_1 Aapeli vei karkit.

Nyt Aapelin väite on $\{p_0 \to p_1, \neg p_0\} \vdash \neg p_1$, mutta totuusjakauma, jolla $v(p_0) = 0$ ja $v(p_1) = 1$ osoittaa selvästi, että $\neg p_1$ ei ole lauseiden $p_0 \to p_1$ ja $\neg p_0$ looginen seuraus. Arkitilanteessa tämä vastaa sitä, että Aapeli vei karkit, muttei piiloutunutkaan pöydän alle (mitä oletukset eivät sulje pois).

7.5 Luonnollisen päättelyn täydellisyys

Toisin kuin resoluutio, luonnollinen päättely muodostaa täydellisen päättelyjärjestelmän. Annetusta lausejoukosta voidaan siis luonnollisella päättelyllä päätellä sen kaikki loogiset seuraukset. Seuraavassa annetaan tämän todistuksesta hahmotelma ja monet yksityiskohdat jätetään lukijalle harjoitustehtäväksi.

Määritelmä 7.14. Propositiolauseiden joukkoa $\mathcal{S}$ sanotaan *ristiriitaiseksi*, jos jollakin propositiolauseella A pätee $\mathcal{S} \vdash A \wedge \neg A$. Jos $\mathcal{S}$ ei ole ristiriitainen, se on *ristiriidaton* tai *konsistentti.*

Lemma 7.15. *Olkoon $\mathcal{S}$ joukko propositiolauseita. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:*

1. *$\mathcal{S}$ on ristiriitainen.*
2. *Jollakin propositiolausella A pätee $\mathcal{S} \vdash A$ ja $\mathcal{S} \vdash \neg A$.*
3. *Jokaisella propositiolauseella A pätee $\mathcal{S} \vdash A$.*

Todistus. Todistus jätetään lukijalle harjoitustehtäväksi. □

Lemma 7.16. *Jos $\mathcal{S}$ on joukko propositiolauseita ja A on propositiolasue, niin seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:*

1. *$\mathcal{S} \cup \{\neg A\}$ on ristiriitainen.*
2. *$\mathcal{S} \vdash A$.*

Todistus. Todistus jätetään lukijalle harjoitustehtäväksi. □

Määritelmä 7.17. Propositiolausejoukko $\mathcal{S}$ on *maksimaalisesti ristiriidaton*, jos se on ristiriidaton ja jokainen propositiolausejoukko $\mathcal{S}' \supsetneq \mathcal{S}$ on ristiriitainen.

Lemma 7.18 (Lindenbaumin lemma)**.** *Jos $\mathcal{S}$ on ristiriidaton joukko propositiolauseita, niin se voidaan laajentaa maksimaalisesti ristiriidattomaksi propositiolausejoukoksi.*

Todistus. (Hahmotelma) Todistuksen ideana on induktiivisesti rakentaa haluttu laajennos. Kaikkien propositiolauseiden joukko on numeroituvasti ääretön, joten voidaan ajatella, että kaikki propositiolauseet on lueteltu joukossa $\{A_0, A_1, \dots\}$. Määritellään joukot $\mathcal{S}_n$ seuraavasti: $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}$. Kun $\mathcal{S}_n$ on määritelty, määritellään

$$\mathcal{S}_{n+1} = \begin{cases} \mathcal{S}_n \cup \{A_n\} & \text{jos } \mathcal{S}_n \cup \{A_n\} \text{ on ristiriidaton,} \\ \mathcal{S}_n & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Seuraavaksi osoitetaan, että

- jokainen $\mathcal{S}_n$ on ristiriidaton,
- joukko $\mathcal{S}' = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_n$ on ristiriidaton,
- joukko $\mathcal{S}'$ on maksimaalisesti ristiriidaton ja $\mathcal{S}' \supseteq \mathcal{S}$.

$\square$

Lause 7.19 (Propositiologiikan täydellisyyslause)**.** *Jos $\mathcal{S}$ on joukko propositiolauseita ja $\mathcal{S} \Rightarrow A$, niin $\mathcal{S} \vdash A$.*

Todistus. (Hahmotelma) Oletetaan, että $\mathcal{S} \nvdash A$. Lemman 7.16 nojalla $\mathcal{S} \cup \{\neg A\}$ on ristiriidaton, joten Lindenbaumin lemman nojalla se voidaan laajentaa maksimaaliseksi ristiriidattomaksi joukoksi $\mathcal{S}' \supseteq \mathcal{S} \cup \{\neg A\}$.

Tämän jälkeen määritellään totuusjakauma v niin, että $v(p_i) = 1$, jos ja vain jos $p_i \in \mathcal{S}'$. Induktiolla voidaan osoittaa, että $v(B) = 1$, jos ja vain jos $B \in \mathcal{S}'$. Mutta tällöin $v(B) = 1$ kaikilla $B \in \mathcal{S}$, mutta $v(A) = 0$ (koska $v(\neg A) = 1$), joten $\mathcal{S} \not\Rightarrow A$. $\square$

Yhdistämällä eheys- ja täydellisyyslauseet saadaan:

Korollaari 7.20. *$\mathcal{S} \vdash A$, jos ja vain jos $\mathcal{S} \Rightarrow A$.*

8 Semanttiset puut

Resoluution avulla voidaan testata, onko annettu lausejoukko ristiriitainen vai ei. Tämä sisältää myös mahdollisuuden testata, onko lause annetun lausejoukon looginen seuraus. Päättelyllä puolestaan voidaan generoida loogisia seurauksia. Mutta entä jos halutaankin löytää totuusjakauma, joka toteuttaa annetun lauseen? Totuustaulumenetelmä antaa tähän mekaanisen, mutta varsin työlään, välineen. Usein totuusjakaumat löydetään ikään kuin arvaamalla tai pähkäilemällä, mitkä lauseen osista pitää toteutta ja mitkä kumota, jotta lause olisi tosi. Tämä pähkäily voidaan systematisoida menetelmäksi, jota kutsutaan *semanttisten puiden* menetelmäksi. Sen avulla voidaan löytää mille tahansa propositiolauseelle totuusjakauma, jos sellainen on olemassa. Ellei lause ole toteutuva, menetelmä myös osoittaa lauseen ristiriitaisuuden.

Esitellään menetelmä esimerkin avulla. On löydettävä totuusjakauma, joka toteuttaa lauseen $(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_0 \vee \neg(p_2 \to p_1))$, jos sellainen on olemassa. Koska lause on konjunktio, sen toteuttamiseksi pitää toteuttaa molemmat välittömät alilauseet. Kerätään nämä ikään kuin vaatimusten listaksi.

$$\begin{array}{c} (p_1 \wedge p_2) \wedge (p_0 \vee \neg(p_2 \to p_1)) \checkmark \\ | \\ p_1 \wedge p_2 \\ | \\ p_0 \vee \neg(p_2 \to p_1) \end{array}$$

Merkki $\checkmark$ tarkoittaa, että ylin lause on 'käsitelty'. Sen asettamat totuusvaatimukset on siirretty eteenpäin ketjussa. Seuraavaksi käsitellään lause $p_1 \wedge p_2$. Tämän toteuttamiseksi täytyy taas toteuttaa molemmat konjunktit, joten jatketaan alaspäin:

$$\begin{array}{c} (p_1 \wedge p_2) \wedge (p_0 \vee \neg(p_2 \to p_1)) \checkmark \\ | \\ p_1 \wedge p_2 \checkmark \\ | \\ p_0 \vee \neg(p_2 \to p_1) \\ | \\ p_1 \\ | \\ p_2 \end{array}$$

Seuraavaksi huomataan, että $p_0 \vee \neg(p_2 \to p_1)$ on disjunktio. Sen toteuttamiseksi on kaksi vaihtoehtoa. Joko p_0 toteutuu, tai $\neg(p_2 \to p_1)$ toteutuu. Tämä aiheuttaa haarautumisen vaihtoehtoisiin toteuttamistapoihin:

$$\begin{array}{c}
(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_0 \vee \neg(p_2 \to p_1)) \checkmark \\
| \\
p_1 \wedge p_2 \checkmark \\
| \\
p_0 \vee \neg(p_2 \to p_1) \checkmark \\
| \\
p_1 \\
| \\
p_2 \\
\begin{array}{cc}
/ & \backslash \\
p_0 & \neg(p_2 \to p_1)
\end{array}
\end{array}$$

Nyt oikeanpuoleisessa haarassa on vielä lause $\neg(p_2 \to p_1)$. Implikaatio on epätosi (ja sen negaatio tosi), kun etujäsen on tosi ja takajäsen epätosi, joten se haara, jossa lause $\neg(p_2 \to p_1)$ esiintyy saa kaksi lausetta lisää:

$$\begin{array}{c}
(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_0 \vee \neg(p_2 \to p_1)) \checkmark \\
| \\
p_1 \wedge p_2 \checkmark \\
| \\
p_0 \vee \neg(p_2 \to p_1) \checkmark \\
| \\
p_1 \\
| \\
p_2 \\
\begin{array}{cc}
/ & \backslash \\
p_0 & \neg(p_2 \to p_1) \checkmark \\
 & | \\
 & p_2 \\
 & | \\
 & \neg p_1 \\
 & | \\
 & X
\end{array}
\end{array}$$

Näin on rakennettu puu alkuperäisen lauseen alilauseista aina literaaleihin asti. Tätä sanotaan *lauseen* $(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_0 \vee \neg(p_2 \to p_1))$ *semanttiseksi puuksi*. Puun haaroja kutsutaan oksiksi. Puu on rakennettu soveltamalla lauseiden konnektiiveihin liittyivä *sääntöjä*. Ylläolevan puun oikeanpuolimmaisessa oksassa esiintyy sekä p_1 että $\neg p_1$. Koska nämä on mahdotonta toteuttaa yhtaikaa, oksa on ristiriitainen ja tämän merkiksi oksan loppuun lisätään ✗. Tällaista oksaa sanotaan *suljetuksi*. Muut oksat ovat *avoimia*. Nyt jäljellä olevasta, avoimesta, oksasta voidaan lukea totuusjakauma: jos oksalla kaikki muut kuin literaalit on merkattu käsitellyiksi, niin toteuttamalla literaalit saadaan totuusjakauma, joka toteuttaa myös oksan muut lauseet, ja siten myös puun juuren. Ylläolevan puun vasemmanpuoleisella oksalla esiintyy literaalit p_0, p_1 ja p_2. On suoraviivaista nähdä, että mikä tahansa totuusjakauma, jolla nämä ovat tosia, eli $v(p_0) = v(p_1) = v(p_2) = 1$, toteuttaa myös alkuperäisen lauseen $(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_0 \vee \neg(p_2 \to p_1))$.

Semanttinen puu rakennetaan siis juuresta alaspäin niin, että tutkittava lause muodostaa juurisolmun, ja puun rakentuminen määräytyy konnektiivisääntöjen mukaan. Negaatio käsitellään aina lauseessa seuraavan konnektiivin mukaan. Säännöt on esitetty taulukossa 8. Sääntöjen soveltamisjärjestys on vapaa, eli ei ole pakko aloittaa ylimmästä käsittelemättömästä säännöstä. Usein onkin syytä pyrkiä alussa soveltamaan sääntöjä, jotka eivät haarauta puuta. Säännön antama jatke on nimittäin lisättävä kaikkiin käsiteltävän lauseen kautta kulkeviin oksiin. Siten esim. lauseen $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$ semanttiseen puuhun tulee nejä oksaa.

$$\begin{array}{c} (A \vee B) \wedge (C \vee D)\ \checkmark \\ | \\ A \vee B\ \checkmark \\ | \\ C \vee D\ \checkmark \\ \begin{array}{cc} A & B \\ \begin{array}{cc} C & D \end{array} & \begin{array}{cc} C & D \end{array} \end{array} \end{array}$$

Haarautumisen takia lauseen $(A \vee B) \wedge (\neg B \wedge \neg C)$ puussa, joka alkaa

$$\begin{array}{c} (A \vee B) \wedge (\neg B \wedge \neg C)\ \checkmark \\ | \\ A \vee B \\ | \\ \neg B \wedge \neg C \end{array}$$

kannattaakin seuraavaksi tarkastella konjunktiota, ja vasta sitten disjunktiota, jolloin puu saa seuraavan muodon:

Konjunktio	$\begin{array}{c} A \wedge B \\ \mid \\ A \\ \mid \\ B \end{array}$	$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\neg(A \wedge B)} \\ \neg A & \neg B \end{array}$	
Disjunktio	$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{A \vee B} \\ A & B \end{array}$	$\begin{array}{c} \neg(A \vee B) \\ \mid \\ \neg A \\ \mid \\ \neg B \end{array}$	
Implikaatio	$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{A \rightarrow B} \\ \neg A & B \end{array}$	$\begin{array}{c} \neg(A \rightarrow B) \\ \mid \\ A \\ \mid \\ \neg B \end{array}$	
Ekvivalenssi	$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{A \leftrightarrow B} \\ A & \neg A \\ \mid & \mid \\ B & \neg B \end{array}$	$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\neg(A \leftrightarrow B)} \\ A & \neg A \\ \mid & \mid \\ \neg B & B \end{array}$	
Negaatio	$\begin{array}{c} \neg\neg A \\ \mid \\ A \end{array}$	$\begin{array}{c} A \\ \mid \\ \neg A \\ \mid \\ ✗ \end{array}$	$\begin{array}{c} \neg A \\ \mid \\ A \\ \mid \\ ✗ \end{array}$

Taulukko 3: Semanttisten puiden säännöt

$$
\begin{array}{c}
(A \lor B) \land (\neg B \land \neg C) \checkmark \\
| \\
A \lor B \checkmark \\
| \\
\neg B \land \neg C \checkmark \\
| \\
\neg B \\
| \\
\neg C \\
\diagup \quad \diagdown \\
A \qquad B
\end{array}
$$

Esimerkki 8.1. Etsitään semanttisen puun avulla totuusjakauma, joka toteuttaa lauseen

$$(p_0 \lor p_1) \to \neg(p_1 \lor \neg(p_2 \to p_0)).$$

Puun lukemisen helpottamiseksi lauseet on numeroitu ja niihin on merkattu, minkä lauseen käsittelystä ne tulevat. Tämä numerointi ei ole osa puumenetelmää. Huomaa, että lauseen käsittely aiheuttaa sääntöä vastaavia jatkeita kaikkiin lauseesta lähteviin oksiin, mutta vain niihin.

$$
\begin{array}{c}
1.\ (p_0 \lor p_1) \to \neg(p_1 \lor \neg(p_2 \to p_1)) \checkmark \\
\diagup \qquad\qquad \diagdown \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
2.\ \neg(p_0 \lor p_1)\ (1) \checkmark \\
| \\
4.\ \neg p_0\ (2) \\
| \\
5.\ \neg p_1\ (2)
\end{array}
&
\begin{array}{c}
3.\ \neg(p_1 \lor \neg(p_2 \to p_1))\ (1) \checkmark \\
| \\
6.\ \neg p_1\ (3) \\
| \\
7.\ \neg\neg(p_2 \to p_1)\ (3) \checkmark \\
| \\
8.\ p_2 \to p_1\ (7) \checkmark \\
\diagup \quad \diagdown \\
\begin{array}{cc}
9.\ \neg p_2\ (8) & 10.\ p_1\ (8) \\
 & | \\
 & 11.\ X\ (6{,}10)
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Nyt oikeanpuolimmaisin oksa sulkeutuu, mutta muut oksat jäävät avoimiksi. Kummastakin voi muodostaa totuusjakauman, joka toteuttaa juuren. Eskimerkiksi keskimmäisestä oksasta saadaan vaatimus $v(\neg p_1) = v(\neg p_2) = 1$, jonka esim. totuusjakauma, jolla $v(p_n) = 0$ kaikilla n, toteuttaa.

Semanttisten puiden menetelmä voidaan tiivistää seuraavasti:

- Tutkittava lause A asetetaan puun juureen, eli laaditaan *lauseen A semanttinen puu.*

- Puun lauseita käsitellään yksi kerrallaan lauseen muotoa vastaavan *säännön* mukaisesti. Säännön antama jatke lisätään kaikkiin lauseen läpi kulkevien avointen oksien loppuun ja käsitelty lause *merkitään* (✓). Lauseiden käsittelyjärjestys on vapaa.

- Jos oksalla esiintyy lause ja sen negaatio (ei tarvitse olla literaaleja), niin oksa on *ristiriitainen*, mikä merkitään lisäämällä ✗ oksan loppuun. Oksa on tällöin *suljettu*. Jos oksa ei ole suljettu, se on *avoin*.

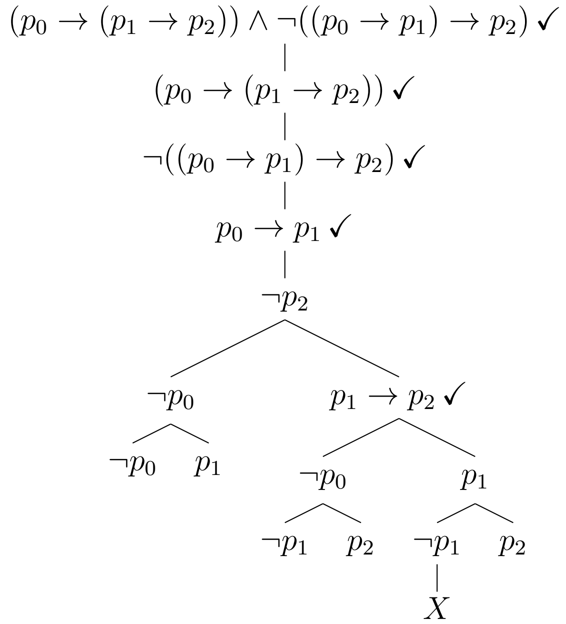
- Semanttinen puu on *suljettu*, jos sen kaikki maksimaaliset oksat ovat suljettuja.

- Jos semanttisen puun kaikki merkkaamattomat lauseet ovat literaaleja, puu on *lopullinen*. Lopullisen puun avoimesta oksasta voi muodostaa totuusjakauman, joka toteuttaa kaikki oksan lauseet, ja näin erityisesti juuren.

Totuusjakauman löytäminen helpolla menetelmällä on erityisen hyödyllistä, kun eheyslauseen nojalla halutaan osoittaa, että jotakin ei voida päätellä.

Esimerkki 8.2. Osoita, ettei ole mahdollista päätellä propositiolausetta $(p_0 \to p_1) \to p_2$ lauseesta $p_0 \to (p_1 \to p_2)$.

Ratkaisu perustuu eheyslauseeseen, jonka mukaan vain loogiset seuraukset voidaan päätellä. Riittää siis osoittaa, että $(p_0 \to p_1) \to p_2$ ei ole lauseen $p_0 \to (p_1 \to p_2)$ looginen seuraus. Tähän puolestaan riittää löytää totuusjakauma, joka toteuttaa lauseen $p_0 \to (p_1 \to p_2)$ muttei lausetta $(p_0 \to p_1) \to p_2$. Laaditaan siis semanttinen puu lauseelle $(p_0 \to (p_1 \to p_2)) \land \neg((p_0 \to p_1) \to p_2)$.



Ylläolevassa puussa on käsitelty kolmatta riviä ennen toista, jotta puu haarautuisi mahdollisimman myöhäisessä vaiheessa. Huomaa, että neljännen rivin implikaation käsittely aiheuttaa haarautumisen puun molemmissa oksissa.

Puuhun jää avoimia oksia, joiden avulla voi konstruoida halutun totuusjakauman, esimerkiksi vasemmanpuoleisimmalla oksalla esiintyy vain vaatimukset $v(\neg p_0) = v(\neg p_2) = 1$, joten totuusjakauma, jolla $v(p_n) = 0$, kaikilla n kelpaa.

Voidaan osoittaa, että semanttisen puun avulla aina voidaan löytää totuusjakauma, joka toteuttaa puun juuren, jos sellainen on olemassa. (Todistus löytyy esimerkiksi kirjasta Salminen-Väänänen: Johdatus logiikkan (Gaudeamus, 1992)). Tähän perustuu lauseen *semanttinen todistus.*

Määritelmä 8.3. Lauseen A semanttinen todistus on mikä tahansa lauseen $\neg A$ suljettu puu.

Esimerkki 8.4. Osoitetaan semanttisen puun avulla, että $(A \to B) \vee (B \to A)$ on tautologia. Laaditaan *semanttinen todistus lauseelle* eli *semanttinen puu annetun lauseeen negaatiolle*:

$$
\begin{array}{c}
\neg((A \to B) \lor (B \to A)) \checkmark \\
| \\
\neg(A \to B) \checkmark \\
| \\
\neg(B \to A) \checkmark \\
| \\
A \\
| \\
\neg B \\
| \\
B \\
| \\
\neg A \\
| \\
\times
\end{array}
$$

Koska tutkittavan lauseen negaation semanttinen puu sulkeutui, sen toteuttavaa totuusjakaumaa ei ole, eli tutkittava lause on tautuologia.