HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus logiikkaan 1, kevät 2016
Harjoitus 1

Näiden tehtävien tekeminen aloitetaan yhdessä laskuharjoituksissa 18.1. alkavalla viikolla. Tehtäviä (ja niiden ratkaisuja) käsitellään uudestaan 25.1. alkavalla viikolla.

Lue kurssimateriaalin luvut 1–2 Propositiolauseista ja rekursiivisista määritelmistä. Huom: Tämän viikon tehtävissä 'ylimääräisiä' sulkeita ei saa jättää pois, vaan kaikki propositiolauseet on kirjoitettava määritelmän mukaisesti.

1. Merkitään propositiosymboleilla seuraavia lauseita:

p_0: Sataa.
p_1: Tuulee.
p_2: On kylmä.

Formalisoi seuraavat lauseet propositiolauseilla:

(a) Jos sataa ja tuulee, niin on kylmä.

(b) Jos on kylmä, mutta ei sada, niin tuulee.

(c) Jos ei sada, niin ei ole kylmä, paitsi jos tuulee.

2. Tarkastellaan lausetta "Ellen tee harjoitustehtäviä, koe tuntuu vaikealta, ja jos koe tuntuu vaikealta, saan päänsäryn, mutta jos teen harjoitustehtäviä, saan päänsäryn."

(a) Mitkä ovat lauseeseen sisältyvät atomilauseet?

(b) Formalisoi lause propositiolauseella.

3. Keksi luonnollisen kielen lause, jonka formalisointi on muotoa

$$(((p_0 \to (p_1 \vee p_2)) \wedge \neg p_2) \to (p_0 \to p_1)).$$

4. Mitkä seuraavista merkkijonoista ovat propositiolauseita? Miten perustelisit vastauksesi?

(a) $((\neg p_0 \wedge p_1) \to p_0)$

(b) $p_0 \to p_1 \to p_2$

(c) $))p_0 \vee \to p_2$

(d) p_{3201}

(e) $p_0 \vee p_1 \wedge p_2$

(f) $((p_0 \wedge p_0) \wedge \neg p_0)$

5. Mitkä ovat seuraavien propositiolauseiden pääkonnektiivit ja välittömät alilauseet?

(a) $\neg(p_0 \wedge p_1)$

(b) $((\neg(p_0 \to p_1) \to p_1) \wedge (p_0 \vee \neg p_1))$

(c) $(p_0 \to \neg p_1)$

(d) p_2

(e) $((p_0 \to (p_1 \to p_2)) \land \neg p_1)$

6. Mitkä ovat lauseen $((p_0 \lor (\neg p_1 \land p_2)) \leftrightarrow (\neg p_1 \to (p_2 \land p_3)))$ alilauseet?

7. Anna esimerkki merkkijonoista A ja B, jotka eivät ole propositiolauseita, mutta joilla $(A \lor B)$ on propositiolause.

8. Luonnollisten lukujen induktion kertaus; ellet muista luonnollisten lukujen induktiota, tutustu kurssin 'Johdatus yliopistomatematiikkaan' materiaaliin osoitteessa http://www.helsinki.fi/~lpjoinon/jym/materiaali/JYMmoniste.pdf.

Todista kaava

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

9. Todista induktiolla, että propositiolauseella, jossa on n konnektiivia, on korkeintaan $2n+1$ alikaavaa. (Huomaa, että tämän voi todistaa induktiolla n:n suhteen, mutta että induktioaskeleeseen tulee monta kohtaa.)

10. Todista induktiolla rakenteen suhteen, että jokainen propositiolause, jossa on parillinen määrä symboleja, sisältää negaation. (Huomaa, että tässä propositiosymboli lasketaan yhdeksi symboliksi, eli esim. p_{315} on yksi symboli.

Seuraavasta haastetehtävästä ei saa harjoituspisteitä, vaan se on tarkoitettu ylimääräiseksi haateeksi niille, joille ylläolevat tehtävät olivat liian tylisä.

Haastetehtävä

Osoita, että kaikilla propositiolauseilla A pätee

> Propositiolauseen A alimerkkijono[1] on A:n alilause, jos ja vain jos se on itsessään propositiolause.

Vihje: tarkastele propositiolauseen alkusegmenttien ja loppusegmenttien oikeiden ja vasenten sulkumerkkien määriä.

[1]Merkkijono X on merkkijonon Y *alimerkkijono*, jos on olemassa (mahdollisesti tyhjät) merkkijonot Z ja Z', joilla pätee $Y = ZXZ'$, missä ZXZ' tarkoittaa merkkijonojen Z, X ja Z' *konkatenaatiota*, eli merkkijonoa, joka saadaan, kun laitetaan merkkijonot Z, X ja Z' peräkkäin.