

Harjoitustehtäviä 3

1. Olkoon $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$. Osoita, että kaikilla $z, \omega \in \mathbb{D}$

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} = \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

2. Olkoon $0 < \alpha \leq 1$ kiinnitetty. Määrää sektorin $S(\alpha) = \{z : 0 < \arg(z) < \alpha\pi\}$ hyperbolinen metriikka.
3. Olkoon Ω_1 ja Ω_2 yhdesti yhtenäisiä kompleksitason aitoja osa-alueita. Jos $\Omega_1 \subset \Omega_2$, niin osoita, että kaikille $z \in \Omega_1$ pätee

$$\lambda_{\Omega_2}(z) \leq \lambda_{\Omega_1}(z).$$

4. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{C}$ yhdesti yhtenäinen aito osa-alue. Osoita, että tällöin kaikilla $z \in \Omega$ pätee

$$\lambda_{\Omega}(z) \leq \frac{2}{\text{dist}(z, \partial\Omega)}.$$

Jos Ω on myös konvekksi, niin osoita, että kaikilla $z \in \Omega$ pätee

$$\frac{1}{\text{dist}(z, \partial\Omega)} \leq \lambda_{\Omega}(z).$$

5. Osoita seuraava versio Koeben 1/4-lauseesta: Jos $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ on analyyttinen injektio ja kuva $f(\mathbb{D})$ on konvekksi alue, niin

$$D\left(f(0), \frac{|f'(0)|}{2}\right) \subset f(\mathbb{D}).$$