Harjoitustehtäviä 2

1. Osoita, että kaikilla $z, \omega \in \mathbb{D}$

$$h_{\mathbb{D}}(z,\omega) = \log\left(\frac{1 + p_{\mathbb{D}}(z,\omega)}{1 - p_{\mathbb{D}}(z,\omega)}\right).$$

   Osoita lisäksi, että kaikilla $z, \omega \in \mathbb{D}$

$$p_{\mathbb{D}}(z,\omega) = \tanh\left(\frac{1}{2}h_{\mathbb{D}}(z,\omega)\right).$$

2. Olkoon $r > 0$ annettu. Osoita, että

$$\left\{z \in \mathbb{D} : |z| < \tanh\left(\frac{r}{2}\right)\right\} = \{z \in \mathbb{D} : h_{\mathbb{D}}(0,z) < r\}.$$

3. Osoita, että avaruus $(\mathbb{D}, h_{\mathbb{D}})$ on täydellinen metrinen avaruus.

4. Osoita, että seuraavat yhtälöt ovat voimassa kaikilla $z, \omega \in \mathbb{D}$:

$$\begin{aligned}
\sinh^2\left(\frac{1}{2}h_{\mathbb{D}}(z,\omega)\right) &= \frac{|z-\omega|^2}{(1-|z|^2)(1-|\omega|^2)}, \\
\cosh^2\left(\frac{1}{2}h_{\mathbb{D}}(z,\omega)\right) &= \frac{|1-z\overline{\omega}|^2}{(1-|z|^2)(1-|\omega|^2)}.
\end{aligned}$$

5. Analyyttisen kuvauksen $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ hyperbolinen derivaatta pisteessä $\omega \in \mathbb{D}$ määritellään

$$f^h(\omega) = f'(\omega)\frac{1-|\omega|^2}{1-|f(\omega)|^2}.$$

   Jos f ei ole kiekon $\mathbb{D}$ konforminen automorfismi, niin osoita arvio

$$|f^h(\omega)| = |f'(\omega)|\frac{1-|\omega|^2}{1-|f(\omega)|^2} < 1$$

   kaikilla $\omega \in \mathbb{D}$.