

## Harjoitustehtäviä 1

1. Jos  $-1 < a < b < 1$ , niin osoita, että

$$h_{\mathbb{D}}(a, b) = \log \left( \frac{1 + \frac{b-a}{1-ab}}{1 - \frac{b-a}{1-ab}} \right).$$

2. Muodosta jono  $(z_n)$  luvuista  $z_n \in \mathbb{D}$  siten, että  $h_{\mathbb{D}}(z_n, z_{n+1}) \rightarrow a$  jollekin  $a \in (0, \infty)$ , kun  $n \rightarrow \infty$ , ja  $|z_n| \rightarrow 1$ , kun  $n \rightarrow \infty$ .
3. Osoita, että jatkuvalla funktiolle  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  pätee:

$$|f(z)| < |z|, \text{ jos ja vain jos } h_{\mathbb{D}}(0, f(z)) < h_{\mathbb{D}}(0, z).$$

4. Olkoon  $a, c \in \mathbb{C}$ , joille  $|a|^2 - |c|^2 = 1$ . Osoita, että kuvaus  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  on konforminen automorfismi, jos ja vain jos  $f$  voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}$$

kaikilla  $z \in \mathbb{D}$ .

5. Olkoon  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  analyyttinen. Osoita, että tällöin seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja:
- (a)  $f$  on kiekon  $\mathbb{D}$  konforminen automorfismi,
  - (b)  $f$  on metriikan  $\lambda_{\mathbb{D}}$  isometria,
  - (c)  $f$  on etäisyyden  $h_{\mathbb{D}}$  isometria.