FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
KEVÄT / SRPING 2015
LASKUHARJOITUS / EXERCISE 12

1($*$). Seuraavassa $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. a) Totea, että Hilbert-avaruuden sisätulo määrittelee aina koersiivisen bilineaarimuodon. b) Onko bilineaarinen muoto

$$B : (f, g) \mapsto \int_0^{10} f(x)g(10 - x)dx$$

koersiivinen avaruudessa $L^2(0, 10)$? Entä

$$R : (f, g) \mapsto \int_0^{10} f(x)g(x)dx + \frac{1}{2}\int_0^{10} f(x)g(10 - x)dx$$

2($*$). Esitä seuraavien operaattoreiden $T : \ell^p \to \ell^p$ transpoosit, kun $1 \leq p < \infty$: a) T on siirto-operaattori (taaksepäin), $T : (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (x_2, x_3, \ldots)$, b) T on kertojaoperaattori $T : (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (2^{-1}x_1, 2^{-2}x_2, 2^{-3}x_3, \ldots)$.

3. Olkoon E Banach-avaruus ja $J_E : E \to E^{**}$ kanoninen upotuskuvaus. Osoita, että $(J_E)^* \circ J_{E^*} = \mathrm{id}_{E^*}$ ja että duaali E^* on refleksiivinen, jos E on refleksiivinen. Tässä id_X tarkoittaa avaruuden X identtistä kuvausta.

4. Oletetaan, että Banach-avaruuden X duaali X^* on separoituva. Osoita, että X on separoituva. Voit edetä seuraavasti: ota avaruuden X^* tiheä jono $(y_n)_{n=1}^\infty$ ja valitse alkiot $x_n \in X$, joille $\|x_n\| = 1$ ja $\langle x_n, y_n \rangle \geq \|y_n\|/2$ kaikilla n (miksi mahdollista?). Käytä jotain Hahn-Banachin lauseen muotoa osoitaamaan, että $\overline{\mathrm{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}} = X$.

****

1($*$). Here $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. a) Show that the inner product of a Hilbert space always defines a coercive bilinear form. b) Is the following bilinear form coercive

$$B : (f, g) \mapsto \int_0^{10} f(x)g(10 - x)dx$$

in the space $L^2(0, 10)$? What about

$$R : (f, g) \mapsto \int_0^{10} f(x)g(x)dx + \frac{1}{2}\int_0^{10} f(x)g(10 - x)dx$$

2($*$). Determine the transposes of the operators $T : \ell^p \to \ell^p$, when $1 \leq p < \infty$: a) T is the backward shift, $T : (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (x_2, x_3, \ldots)$, b) T is the multiplier $T : (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (2^{-1}x_1, 2^{-2}x_2, 2^{-3}x_3, \ldots)$.

3. Let E be a Banach space $J_E : E \to E^{**}$ the canonical embedding. Prove that $(J_E)^* \circ J_{E^*} = \mathrm{id}_{E^*}$ and that the dual E^* is reflexive, if E is reflexive. Here id_X denotes the identity mapping of the space X.

4. Assume that the dual X^* of the Banach space X is separable. Prove that X is separable. You can proceed as follows: in the space X^*, take a dense sequence $(y_n)_{n=1}^\infty$ and choose elements $x_n \in X$ such that $\|x_n\| = 1$ and $\langle x_n, y_n \rangle \geq \|y_n\|/2$ for all n (why is this possible?). Use some form of the Hahn-Banach theorem to show that $\overline{\mathrm{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}} = X$.