FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
KEVÄT / SRPING 2015
LASKUHARJOITUS / EXERCISE 11

1(*). a) Olkoon $1 < p < \infty$ ja $1/p + 1/q = 1$. Kuvaus $\lambda : x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \mapsto 3x_3 - 3x_2 + 5x_6$ on jatkuva ja lineaarinen $\ell^p \to \mathbb{K}$, siis ℓ^p:n duaalin alkio. Mikä ℓ^q:n alkio $y = (y_k)_{k=1}^{\infty}$ vastaa λ:aa samaistuksessa $(\ell^p)^* = \ell^q$ (eli pätee $\langle x, y\rangle = \lambda x$ kaikilla x)? Laske λ:n duaalinormi.
b) Tiedämme, että Banach–avaruuden $L^p(-1,1)$ duaali "on" $L^q(-1,1)$, kun $1 < p < \infty$ ja $1/p + 1/q = 1$. Tällöin funktio $g \in L^q(-1,1)$ määrittelee $L^p(-1,1)$:n duaalin alkion kaavalla

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Mikä L^q:n alkio vastaa λ:aa, kun $\lambda : L^p(-1,1) \to \mathbb{R}$,

$$\lambda(f) := \int_{-1}^{1} e^{x^2} f(1 - |x|)dx$$

2. Totea, että jokainen $g \in L^1(0,1)$ määrittelee avaruuden $C(0,1)$ duaalin alkion kaavalla

$$f \mapsto \int_{0}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Oletetaan, että kerroinkunta on $\mathbb{R}$, että g on jatkuva ja $g(t) \geq 0$ kaikilla $t \in [0,1]$. Osoita tässä erikoistapauksessa, että g:n duaalinormi on sama kuin $\|g\|_{L^1}$.

3(*). (Hahn-Banachin lauseen sovellutus.) Osoita, että on olemassa jatkuva lineaarikuvaus $T : L^\infty(0,1) \to \mathbb{R}$, jolle $T\varphi = \varphi(\frac{1}{2})$ kaikilla jatkuvilla $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$.

4. Olkoon $1 \leq p \leq \infty$. Esitä jokin isomorfismi T avaruudelta $L^p(]0,1[)$ avaruudelle E, kun a) $E := L^p(]-1,1[)$ b) $E := L^p(]0,\infty[)$. Jälkimmäisessä tapauksessa T voisi olla esim. muotoa $Tf(x) = g(x)f(h(x))$, missä $f \in L^p(]0,1[)$, $x \in]0,\infty[$ on muuttuja, sekä g ja h ovat sopivasti valittuja funktioita $]0,\infty[\to \mathbb{R}$.
****

1(*). a) Let $1 < p < \infty$ and $1/p + 1/q = 1$. The map $\lambda : x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \mapsto 3x_3 - 3x_2 + 5x_6$ is continuous and linear $\ell^p \to \mathbb{K}$, in other words, an element of the dual of ℓ^p. Which element $y = (y_k)_{k=1}^{\infty}$ of ℓ^q corresponds to λ in the identification $(\ell^p)^* = \ell^q$ (there holds $\langle x, y\rangle = \lambda x$ of all x)? Calculate the dual norm of λ.
b) It is known that the dual of the space $L^p(-1,1)$ "is" $L^q(-1,1)$, when $1 < p < \infty$ and $1/p + 1/q = 1$. Here the function $g \in L^q(-1,1)$ defines an element of the dual of $L^p(-1,1)$ by the formula

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Which element of L^q corresponds the functional λ, when $\lambda : L^p(-1,1) \to \mathbb{R}$,

$$\lambda(f) := \int_{-1}^{1} e^{x^2} f(1-|x|)dx$$

2. Show that every $g \in L^1(0,1)$ defines an element of the dual of the space $C(0,1)$ by the formula

$$f \mapsto \int_{0}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Assume that the scalar field is $\mathbb{R}$ and g is continuous and that $g(t) \geq 0$ for all $t \in [0,1]$. Prove in this special case that the dual norm of g is the same as $\|g\|_{L^1}$.

3($*$). (Application of the Hahn-Banach theorem.) Prove that there exists a bounded linear mapping $T : L^\infty(0,1) \to \mathbb{R}$ such that $T\varphi = \varphi(\frac{1}{2})$ for all continuous $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$.

4. Let $1 \leq p \leq \infty$. Find an isomorphic mapping T from the space $L^p(]0,1[)$ onto E, when a) $E := L^p(]-1,1[)$ b) $E := L^p(]0,\infty[)$. In the latter case T could be of the form $Tf(x) = g(x)f(h(x))$, where $f \in L^p(]0,1[)$, $x \in]0,\infty[$ is a variable and g and h are suitable functions $]0,\infty[\to \mathbb{R}$.