Diff. Yhtälöt II, Harj. 6 (by Anssi)

1 a) $\det(A-\lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -4 & -2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$= (-1-\lambda)\big((-1-\lambda)(1-\lambda)\big)$

$= (1+\lambda)(1+\lambda)(1-\lambda)$

$\Rightarrow$ A:lla on positiivinen ominaisarvo 1, joten origo on exponentiaalisesti epästabiili.

$\Rightarrow$ myös asymptoottisesti epästabiili.

b) $\det(\mathbb{1}\lambda - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ 1 & \lambda+2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = 0$

$\vdots$

$\Leftrightarrow \quad \underline{\lambda_i = -1 \text{ tai } -2}$

Koska kaikkien ominaisarvojen reaaliosa on <0, niin origo on exp-stabiili $\Rightarrow$ asymp. stab.

c) $\det(\lambda - A) = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda+1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda+3 \end{vmatrix} = 0$

$\vdots$

$\Leftrightarrow \underline{\lambda = 0}$.

$\Rightarrow$ ei ainakaan exp.-stabiili.

Katsotaan onko λ degeneroitunut, eli etsitään 0 vastaavat om. vektorit.

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \bar{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 & (1) \\ x + y + z = 0 & (2) \\ 3x + 2y + 3z = 0 & (3) \end{cases}$$

$-2 \cdot (2) + (1) = \underline{-y = 0}$. Samoin

$-3 \cdot (2) + (3) = \underline{-y = 0}$.

Joten $x + z = 0 \Rightarrow$ om.-vektori $\underline{x_\lambda = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}$

$\therefore$ $\lambda = 0$ on degeneroitunut

... jotta seuraa, että diff. yhtälöllä on $3-1=2$ polynomiesti kasvavaa ratkaisua.

$\Rightarrow$ Epästabiili.

d) $\det(A-\lambda) = \begin{vmatrix} -8-\lambda & -2 & -6 \\ 4 & 1-\lambda & 3 \\ 8 & 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\vdots$

$\Leftrightarrow$ $\lambda = 0$ tai -1

$\Rightarrow$ ei ainakaan exp.-stabiili.

Etsitään taas om.-vektorit:

$$\begin{bmatrix} -8 & -2 & -6 \\ 4 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \bar{0} \Leftrightarrow 4x + y + 3z = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$\therefore$ Ominaisvektorit virittävät avaruuden $\mathrm{span}(4\ 1\ 3)^{\perp}$ joka on 2-ulotteinen.

$\Rightarrow \lambda = 0$ EI ole degeneroitunut

... mistä seuraa, että origo on stabiili, muttei asymptoottisesti stab (koska jos alkuarvo $x_0 \in \text{span}(4\ 1\ 3)^{\perp}$, niin $Ax_0 = 0$ mikä tarkoittaa että $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ ratkaisu ei suppene origoon.

(2) $\dot{x}(t) = -x^3(t)$

$$\Longleftrightarrow \frac{\dot{x}(t)}{x^3(t)} = -1 \qquad (\text{jos } x(t) \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2(t)}\right) = -1 \qquad \Big|\Big| \int_0^t$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2(t)} - \frac{1}{x^2(0)}\right) = t$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2(t)} = 2t + \frac{1}{x^2(0)} \quad \Leftrightarrow \quad x^2(t) = \frac{x^2(0)}{2t\,x^2(0) + 1}$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \pm \frac{|x(0)|}{\sqrt{2t\,x^2(0)+1}}$$

Jos $x(0) > 0$, valitaan "+" $\leadsto$ $x(t) = \dfrac{x(0)}{\sqrt{2t\,x^2(0)+1}}$.

Jos $x(0) < 0$, valitaan "−" $\leadsto$ $x(t) = \dfrac{x(0)}{\sqrt{2t\,x^2(0)+1}}$.

Ratkaisut ovat olemassa ajan hetkillä joilla $t > -\frac{1}{2x^2(0)}$.

Koska $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{x(0)}{\sqrt{2t\,x^2(0)+1}} = 0$ kaikilla $x(0)$

niin origo on asymptoottisesti stabiili.

Jos se olisi exp-stabiili, niin löytyisi $\gamma >$ s.e.

$$|x(t)| \leq M e^{-\gamma t} \quad (\forall t \geq 0),$$

kun $|x(0)| < \delta$.

Mutta

$$\left| \frac{x(0)}{\sqrt{2t x^2(0) + 1}} \right| \leq M e^{-\gamma t}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2t x^2(0) + 1} \geq \frac{x(0)}{M} e^{\gamma t} \quad (t \geq 0)$$

mikä ei pidä paikkaansa.

(3) $\begin{cases} \dot{r} = 1 - r \\ \dot{\theta} = \sin^2 \theta/2 \end{cases}$

Koska $\dot{r} = -r$ ratk. on $r(t) = e^{-t} r_0$, niin epähomogeenisen $\dot{r} = 1 - r$ ratk. on

$$r(t) = e^{-t} r_0 + \int_0^t ds\, e^{-(t-s)} 1$$

$$= e^{-t} r_0 + e^{-t}(e^t - 1)$$

$$= \underline{e^{-t} r_0 + 1 - e^{-t}} = \underline{1 + e^{-t}(r_0 - 1)}$$

$$\dot{\theta} = \sin^2 \theta/2 \iff \frac{\dot{\theta}}{\sin^2 \theta/2} = 1 \quad \Big\| \int_0^t$$

$$\int_0^t ds \frac{\dot{\theta}(s)}{\sin^2 \theta(s)/2} = t$$

Käytämme taikatemppua (Spivak katsoo sitä "World's sneakiest substitution"). $\underline{u := \tan \theta/2}$.

$$\Rightarrow \dot{u} = \underbrace{\tan^2 \frac{\theta}{4}}_{1 + \tan^2 \theta/2} \cdot \dot{\theta}/2 = \underline{(1 + u^2)\, \dot{\theta}/2}$$

$$\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sin^2 \theta/2}{\sin^2 \theta/2 + \cos^2 \theta/2} = \frac{1}{1 + u^{-2}} = \frac{u^2}{u^2 + 1}.$$

$$\dots \int_0^t ds \frac{2\dot{u}(s)}{(1+u^2(s))} \cdot \frac{u^2(s)+1}{u^2(s)} = 2\int_0^t ds \frac{\dot{u}(s)}{u^2(s)} = -2\int_0^t ds \left(\frac{1}{u(s)}\right)^{\cdot}$$

$$= \frac{2}{u(0)} - \frac{2}{u(t)}$$

$$= \frac{2}{\tan \theta_0/2} - \frac{2}{\tan \theta(t)/2}$$

$$\rightsquigarrow \frac{2}{\tan \theta(t)/2} = \frac{2}{\tan \theta_0/2} - t$$

$$\Leftrightarrow \theta(t) = 2\arctan\left(\frac{2\tan(\theta_0/2)}{2 - t\tan(\theta_0/2)}\right) \quad \left(t \neq \frac{2}{\tan \theta_0/2}\right)$$

Kun $t \to \frac{2}{\tan \theta_0/2}$, niin $\theta(t) \to \pi$.

Jos määrittelemme $\theta\left(\frac{2}{\tan \theta_0/2}\right) := \pi$, niin saamme ratkaisun joka on olemassa kaikilla t.

Tasapainokohta on se jossa $\begin{cases} 0 = 1 - r \\ 0 = \sin^2\theta \end{cases}$

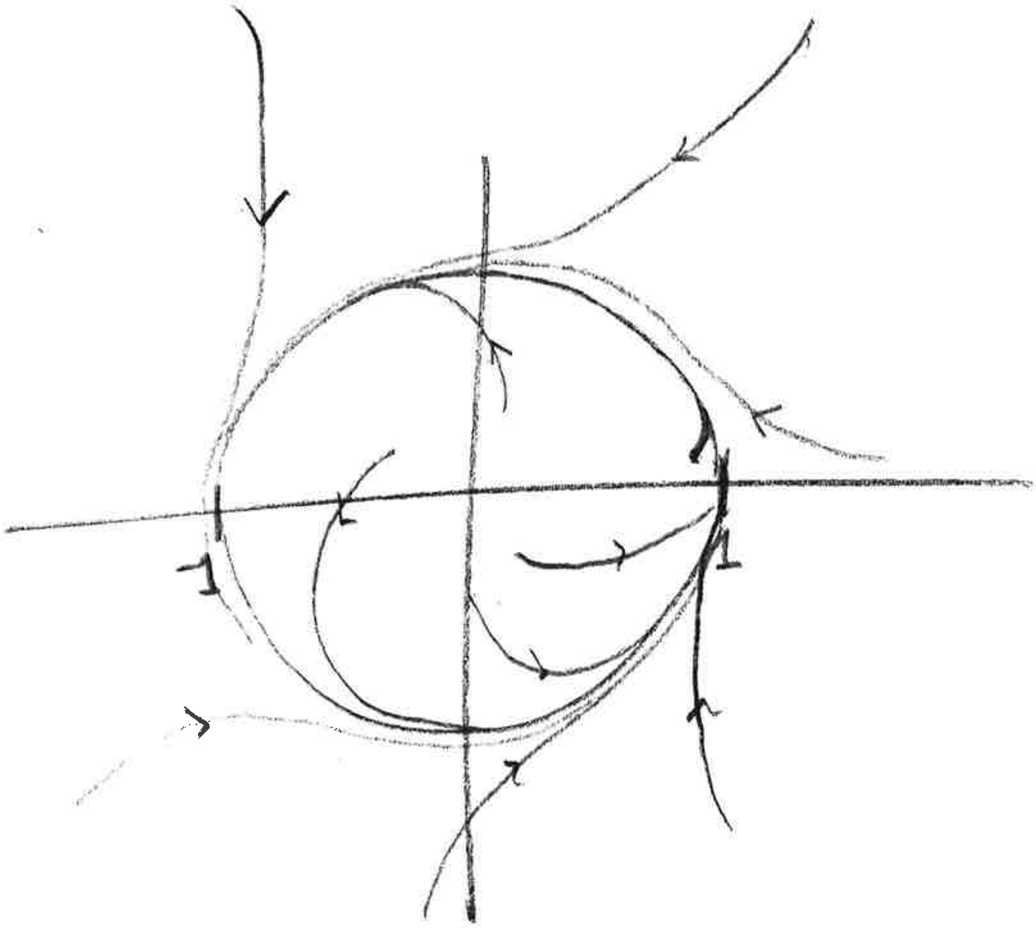
$\Leftrightarrow r = 1$ ja $\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$.

... On helppo nähdä, että $r(t) = 1 + (r_0 - 1)e^{-t} \longrightarrow 1$ kun $t \to \infty$. Samoin

$$\lim_{t\to\infty} 2\arctan\left(\frac{2\tan\theta_0/2}{2 - t\tan\theta_0/2}\right) = 2\arctan 0 = 0.$$

Eli tavallaan $r = 1, \theta = 0$ on asymptoottisesti stabiili koska kaikki ratkaisut suppenevat sitä kohti.

$(r=1, \theta=0)$ ei kuitenkaan ole stabiili: Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $B(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \varepsilon)$ k.p:n ympäristö. Voidaan valita $(r_0, \theta_0) = (1, \frac{\varepsilon}{2})$ $\Rightarrow (r_0, \theta_0) \in B(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \varepsilon)$ mutta sitä vastaava ratkaisu kulkee pisteen $r = 1, \theta = \pi$ kautta.



④ $\dot{x} = 1 + \mu x + x^2$

Tasapainopisteessä $\dot{x}(0) = 0$, joten $x(t) \equiv x^*$, jotta ehto

$$0 = 1 + \mu x^*(\mu) + x^*(\mu)^2$$

$$(=) \quad \underline{x^*(\mu) = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}} \qquad (*)$$

Täytyy olla $\mu^2 - 4 \geq 0$, jotta systeemillä on tasapainopiste. Jos $|\mu| \geq 2$, niin pisteet x^* saadaan kaavalla $(*)$.

Yleisesti jos $\dot{x} = f(x)$, niin tasapainopisteen x^* (missä $f(x^*) = 0$) stabiilius saadaan seuraavasti:

Jos $\underline{f'(x^*) > 0}$, niin t.p. on (exponentiaalisesti) <u>epästabiili</u>.

Ja $\underline{f'(x^*) < 0}$, — " — <u>stabiili</u>.

Meidän tapauksessamme $f(x) = 1 + \mu x + x^2$, joten $f'(x) = \mu + 2x \Rightarrow \underline{f'(x^*(\mu)) = \pm\sqrt{\mu^2 - 4}}$.

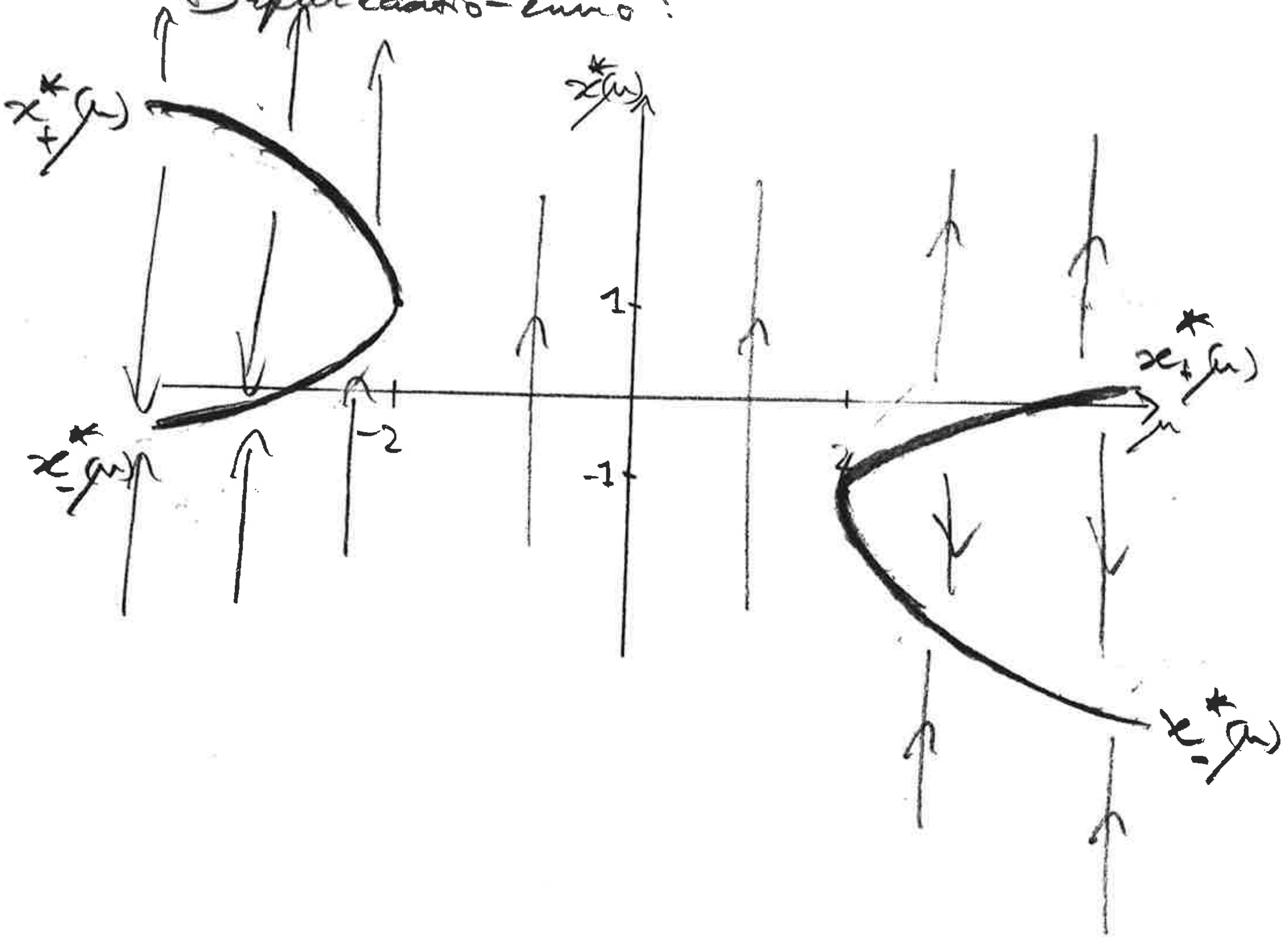
... Täten ylemmässä "haarukassa", jossa

$\partial_x f(x_+^*(\mu)) = +\sqrt{\mu^2-4} > 0 \Rightarrow$ t.p. on epästab.

Vastaavasti alemmassa, jossa

$\partial_x f(x_-^*(\mu)) = -\sqrt{\mu^2-4} < 0 \Rightarrow$ t.p. on (exp) stabiili.

Bifurkaatio-kuvio:



⑤ $\dot{x} = x + \dfrac{\mu x}{1+x^2} = f(\mu, x)$.

Tasapainopisteet: $f(\mu, x^*) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^* + \dfrac{\mu x^*}{1+x^{*2}} = 0 \quad \| (1+x^{*2})$

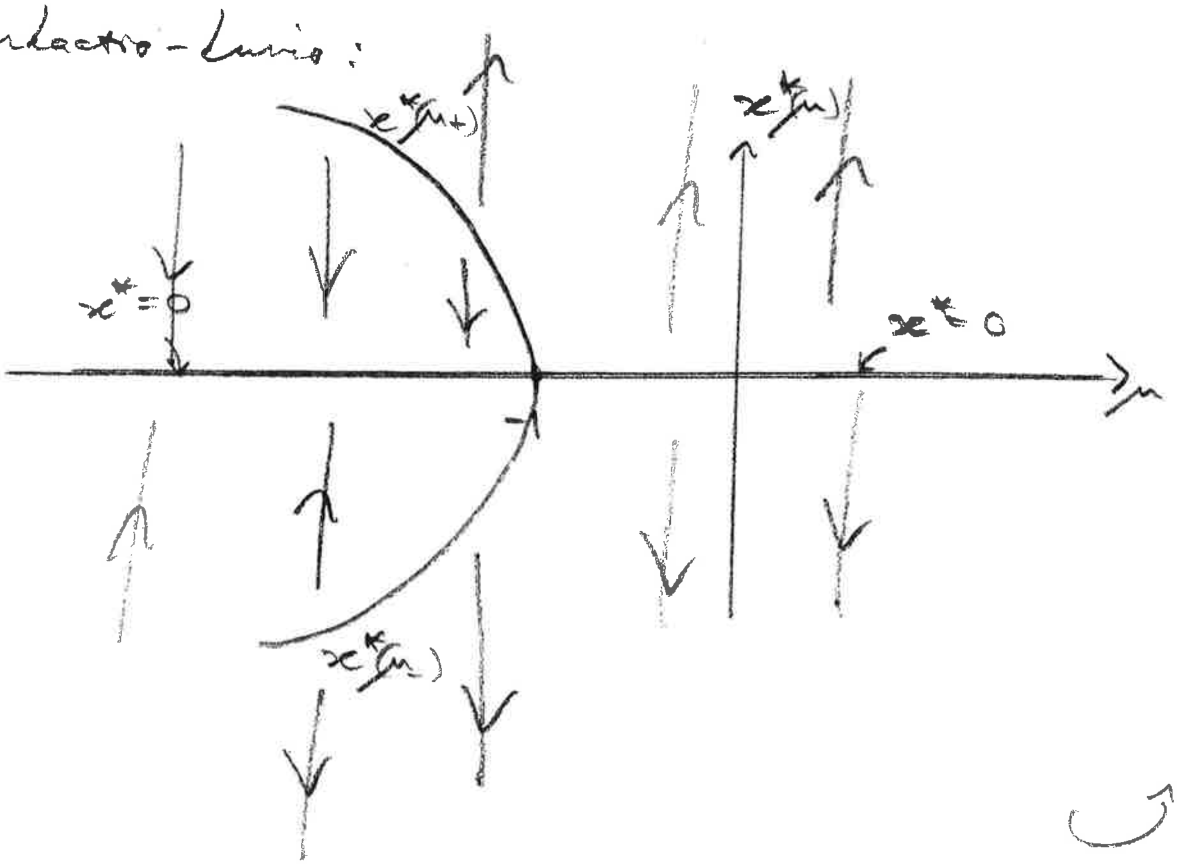
$\Leftrightarrow \quad x^* + x^{*3} + \mu x^* = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^*(1+\mu+x^{*2}) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^* = 0 \quad$ tai $\quad \underline{x^*_{\pm}(\mu) = \pm\sqrt{-1-\mu}}$

T.p. $x^* = 0$ on olemassa kaikilla $\mu \in \mathbb{R}$, kun taas $\underline{x^*_{\pm}(\mu) = \pm\sqrt{-1-\mu}}$ on olemassa arvoilla $\underline{\mu < -1}$.

Bifurkaatio-kuvio:



... Stabiilius :

$$\partial_x f(\mu,x)\Big|_{x=x^*} = 1 + \frac{\mu-\mu x^2}{(1+x^2)^2}\Big|_{x=x^*}$$

Nyt

$$0 < \partial_x f(\mu, x_\pm^*(\mu)) = 1 + \frac{\mu-\mu(-1-\mu)}{(1+(-1-\mu))^2} = 1 + \frac{2\mu+\mu^2}{\mu^2}$$

$$\Leftrightarrow 0 < \mu^2 + 2\mu + \mu^2 = 2(\mu+\mu^2) = 2\mu(1+\mu)$$

$\Leftrightarrow (\mu>0)$ ja $1+\mu>0$; tai $(\mu<0)$ ja $\underline{\underline{\mu<-1}}$

Eli $\partial_x f(\mu, x_\pm^*(\mu)) > 0$, joten molemmat epätriviaaleista t.p. ovat (exponentiaalisesti) epästabiileja.