Diff. yhtälöt II, Harj. 5 (By Anssi)

(1) Tarkistetaan että $x(t) := \cos^2 t$ on ratkaisu diff. yhtälölle

$$\ddot{x}(t) + 2(1 - \tan^2 t)x(t) = 0$$

Koska

$$\frac{d}{dt}\cos^2 t = -2\cos t \sin t \quad \text{, joten}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\cos^2 t = 2\sin^2 t - 2\cos^2 t \, ,$$

niin on helppo tarkistaa, että

$$(\cos^2)''(t) + 2(1 - \underbrace{\tan^2 t}_{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}})\cos^2(t) = 0 \quad , \forall t \in \mathbb{R}.$$

Haaste: Koska diff. yhtälön kertaluku on kaksi, tarvitsemme kaksi riippumatonta ratkaisua. Mistä toinen???

Idea: "Kertaluvun pudotus" (by d'Alembert)

Perustuu huomioon tulon derivoinnista:

$$\frac{d}{dt}(f(t)g(t)) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$$

...

... Tulon fg derivaatta sisältää termin $f'g$
jossa ei ole g:n derivaattaa. (Samoin fg'...).
Yleisemmin $\frac{d^n}{dt^n}(fg)$ sisältää termin $f^{(n)}(t)\,g(t)$
jossa ei edelleenkään ole g:n derivaattaa.

Nyt jos f toteuttaa diff. yhtälön

$$\sum_{k=0}^{n} a_k f^{(k)}(t) = 0 \quad , \text{ niin}$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (f\cdot g)^{(k)}(t) = \underline{\underline{0\cdot g(t)}} + (\cdots)g'(t) + \ldots + (\cdots)g^{(n)}(t)$$

eli "g:n derivoimaton termi" putoaa pois.

Sovellus: Jos $x(t)$ toteuttaa diff. yhtälön, ...
niin tulo $c(t)x(t)$ toteuttaa sen myös
jos $\underline{\underline{c'(t)}}$ toteuttaa diff. yhtälön jonka
kertaluku on <u>yhtä alempi</u>.

Eli, kun $x(t) = \cos^2 t$, teemme yritteen
$y(t) = c(t)x(t)$. Nyt

$$y''(t) + 2(1-\tan^2 t)\,y(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow c''(t)x(t) + 2c'(t)x'(t) + \underline{\underline{c(t)}}x''(t) + 2(1-\tan^2 t)\underline{\underline{c(t)}}x(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow c''(t)x(t) + 2c'(t)x'(t) + c(t)\Big\{\underbrace{x''(t) + 2(1-\tan^2 t)x(t)}_{=0\,!}\Big\} = 0$$

$$\Leftrightarrow c''(t)\cos^2(t) - 4c'(t)\cos t\sin t = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 t\left[c''(t) - 4c'(t)\tan t\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos t = 0 \quad \text{tai} \quad c''(t) = 4c'(t)\tan t$$

$$\Leftrightarrow c'(t) = c'(0)e^{-\int_0^t 4\tan s\,ds}$$

$$\Leftrightarrow \underline{c(t) = c(0) + c'(0)\int_0^t e^{-\int_0^{s_1} 4\tan s_2\,ds_2}\,ds_1}$$

$$\therefore y(t) := \left(c(0) + c'(0)\int_0^t e^{-\int_0^{s_1}\tan s_2\,ds_2}\,ds_1\right)\cos^2 t$$

on ratkaisu millä tahansa $c(0), c'(0) \in \mathbb{R}$.

Jotta saamme $\cos^2 t$:stä riippumattoman, täytyy valita $\underline{c'(0) \neq 0}$.

(2) Koska $\frac{d^n}{dt^n} e^t = e^t \quad n = 0, 1, 2, \ldots$ niin

e^t toteuttaa yhtälön $\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = 0$

joss $(1 + p(t) + q(t))e^t = 0$

joss $\underline{1 + p(t) + q(t) = 0} \quad (e^t > 0 \ \forall t)$

Nyt

$$(t-1)\ddot{x}(t) - t\dot{x}(t) + x(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x}(t) + \underbrace{\frac{t}{1-t}}_{p}\dot{x}(t) + \underbrace{\frac{1}{t-1}}_{q}x(t) = 0 \quad (t \neq 1)$$

Koska $1 + \frac{t}{1-t} + \frac{1}{t-1} = \frac{1 - t + t - 1}{1-t} = 0$,

niin e^t on yksi ratkaisu.

Etsitään toinen yritteellä $\underline{y(t) = c(t)e^t}$.

Kuten tehtävässä 1, kun y:n sijoittaa yhtälöön

$$(t-1)\ddot{y}(t) - t\dot{y}(t) + y(t) = 0$$

niin jäljelle jää ensimmäisen kertaluvun yhtälö $\dot{c}(t)$:lle:

$$(t-1)(\ddot{c}(t)e^t + 2\dot{c}(t)e^t) - t\dot{c}(t)e^t = 0 \quad \| \cdot e^{-t} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)\ddot{c}(t) + (t-2)\dot{c}(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{c}(t) = \frac{2-t}{t-1}\dot{c}(t) \quad (t \neq 1)$$

...

$$\ldots \Leftrightarrow \dot{c}(t) = \dot{c}(0)\, e^{\int_0^t \frac{2-s}{s-1} ds} = \dot{c}(0)\, e^{-t}(t-1)$$

$$\left(\int_0^t \frac{2-s}{s-1} ds = \int_0^t \left(-1 + \frac{1}{s-1}\right) ds = -t + \ln(t-1) \right)$$

$$\Leftrightarrow c(t) = c(0) + \dot{c}(0) \int_0^t e^{-s}(s-1)\, ds$$

$$\left(\int_0^t e^{-s}(s-1)\, ds = \underbrace{\int_0^t e^{-s} s}_{\Big/_0^t -e^{-s}s \;+\; \cancel{\int_0^t e^{-s}}} - \cancel{\int_0^t e^{-s}} = -e^{-t} t \right)$$

$$\therefore\ y(t) = \left(c(0) - \dot{c}(0)\, t e^{-t}\right) e^{t} = c(0) e^{t} - \dot{c}(0)\, t\, e^{-t}.$$

Riippumatonta ratkaisua varten $\underline{\dot{c}(0) \neq 0}$.

3) Olkoon $X(t) = \begin{bmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \phi_1'(t) & \phi_2'(t) \end{bmatrix}$ ja

$$W(t) := \det X(t) = \phi_1(t)\phi_2'(t) - \phi_2(t)\phi_1'(t).$$

<u>Jos</u> $W(t) = C e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}$, niin $C = W(t_0)$,

eli $\underline{W(t) = W(t_0) e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}}$.

Näyttääkö tutulta? Koska $\frac{d}{dt} e^{\int^{t} f(s)\,ds} = f(t) e^{\int^{t} f(s)\,ds}$,
niin meidän riittää osoittaa, että $W(t)$
toteuttaa diff. yhtälön $\underline{\dot{W}(t) = -p(t) W(t)}$.

<u>Siispä derivoimme:</u>

$$\dot{W}(t) = \frac{d}{dt}(\phi_1\phi_2' - \phi_2\phi_1')$$

$$= \cancel{\phi_1'\phi_2'} + \phi_1\phi_2'' - \cancel{\phi_2'\phi_1'} - \phi_2\phi_1''$$

$$= \phi_1(-p\phi_2' - q\phi_2) - \phi_2(-p\phi_1' - q\phi_1)$$

$$= -p\phi_1\phi_2' + p\phi_2\phi_1'$$

$$= -p\,W(t).$$

Done.

... Yleisemmin on kysymys seuraavasta tuloksesta: $\boxed{\frac{d}{dt}\det X(t) = \mathrm{Tr}\,A(t)\cdot\det X(t),}$

missä X toteuttaa $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$.

Heuristinen perustelu: Koska $X(t+\varepsilon) \approx X(t) + \varepsilon \underbrace{\dot{X}(t)}_{A(t)X(t)}$

$$\det X(t+\varepsilon) \approx \det\left[(\mathbb{1}+\varepsilon A(t))X(t)\right]$$

$$= \underline{\det(\mathbb{1}+\varepsilon A(t))}\det X(t).$$

Nyt koska $\mathbb{1}+\varepsilon A = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon a_{11} & \varepsilon a_{12} & \cdots & \varepsilon a_{1n} \\ \varepsilon a_{21} & 1+\varepsilon a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \varepsilon a_{n1} & \cdots & & 1+\varepsilon a_{nn} \end{bmatrix}$

niin on suht. helppo nähdä, että

$$\det(\mathbb{1}+\varepsilon A) \approx (1+\varepsilon a_{11})(1+\varepsilon a_{22})\cdots(1+\varepsilon a_{nn})$$

$$\approx 1+\varepsilon\underbrace{(a_{11}+\cdots+a_{nn})}_{\mathrm{Tr}A},$$

kun ε^2 ja pienemmät tiputetaan pois.

Tätä voi soveltaa yhtälöön

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\phi_1 & \phi_2 \\ \phi_1' & \phi_2'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1 & \phi_2 \\ \phi_1' & \phi_2'\end{bmatrix}.$$

④ Oletus on: $\exists\, \phi_1, \phi_2$ s.e. $W(\phi_1, \phi_2) \neq 0$ ja

$$\begin{cases} \phi_1'' + p\phi_1' + q\phi_1 = 0 \\ \phi_2'' + p\phi_2' + q\phi_2 = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Tästä voidaan ratkaista q ja p:

$$(*) \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_1' \\ \phi_2 & \phi_2' \end{bmatrix}}_{= \Phi^T} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\phi_1'' \\ -\phi_2'' \end{bmatrix}$$

Koska $W = \det(\Phi) = \det(\Phi^T)$ niin Φ^T voidaan kääntää

$$(\Phi^T)^{-1} = \frac{1}{\underbrace{\det \Phi^T}_{W}} \begin{bmatrix} \phi_2' & -\phi_1' \\ -\phi_2 & \phi_1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ q = \frac{1}{W}\left(-\phi_2'\phi_1'' + \phi_1'\phi_2''\right) = \frac{\dot{W}}{W}$$

Voit tarkistaa

$$p = \frac{1}{W}\left(\phi_2\phi_1'' - \phi_1\phi_2''\right) = -\frac{\dot{W}}{W}$$

⑤ Jos $\phi_1 = t$ ja $\phi_2 = \cos t$, niin

$$W(\phi_1, \phi_2) = t(-\sin t) - 1 \cdot \cos t = -(t \sin t + \cos t)$$

ja

$$g(t) = \frac{1}{W} \cdot (t \sin t \cdot 0 - 1 \cdot \cos t) = \frac{-\cos t}{W}.$$

$$p(t) = \frac{1}{W}(\cos t \cdot 0 + t \cos t) = \frac{t \cos t}{W}.$$

Ratkaisu joka sivuaa suoraa $x = t + 1$ kun $t = 0$, ~~toteuttaa~~ alkuehdot: $x(0) = 1$ ja $\dot{x}(0) = 1$

Etsimme c_1, c_2 s.e.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} \phi_1(0) \\ \phi_1'(0) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \phi_2(0) \\ \phi_2'(0) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow c_1 = 1 = c_2$.

$\therefore$ $\underline{x(t) = 1 \cdot t + 1 \cdot \cos t}$.