Differentiaaliyhtälöt II

6. harjoitus, kevät 2016

Määritelmä: Olkoon $u(t;\xi)$ autonominen dynaaminen systeemi $\mathbf{R}^n$:ssä.

(a) Piste $x^* \in \mathbf{R}^n$ on u:n *tasapainokohta* jos $u(t;x^*) = x^*$ kaikille $t \geq 0$.

(b) Tasapainokohta x^* on *stabiili* jos

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad |\xi - x^*| < \delta,\ t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad |u(t;\xi) - x^*| < \varepsilon.$$

(c) Jos tasapainokohta x^* ei ole stabiili, niin se on *epästabiili.*

(d) Tasapainokohta x^* on *asymptoottisesti stabiili* jos se on stabiili ja jos lisäksi

$$\exists \delta > 0 : \quad |\xi - x^*| < \delta \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} u(t;\xi) = x^*.$$

(e) Tasapainokohta x^* on *eksponentiaalisesti stabiili* jos se on stabiili ja jos lisäksi

$$\exists \delta > 0 \quad M > 0 \quad \exists \gamma > 0 : \quad |\xi - x^*| < \delta,\ t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad |u(t;\xi) - x^*| \leq Me^{-\gamma t}.$$

1. Tutki origon stabiilisuutta (toisin sanoen, tutki onko origo epästabiili, stabiili, asymptoottisesti stabiili, eksponentiaalisesti stabiili) kun $u(t;\xi)$ on lineaarisen alkuarvotehtävän

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) \\ x(0) &= \xi \end{aligned}$$

virittämä dynaaminen systeemi ja

$$\text{(a)}\ A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)}\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\text{(c)}\ A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{(d)}\quad A = \begin{pmatrix} -8 & -2 & -6 \\ 4 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Ratkaise skalaariyhtälö

$$\dot{x}(t) = -x(t)^3$$

ja osoita, että origo on asymptoottisesti stabiili muttei eksponentiaalisesti stabiili.

3. Kaksiulotteinen differentiaaliyhtälöryhmä olkoon annettu napakoordinaatistossa:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= 1 - r, \\ \dot{\theta} &= \sin^2 \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Napakulmat θ ja $\theta + n2\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ identifioidaan keskenään. Karteesiset koordinaatit saadaan muunnoskaavoista $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

   (a) Ratkaise yhtälöryhmä.

   (b) Osoita, että $(r, \theta) = (1, 0)$ eli $(x, y) = (1, 0)$ on tasapainokohta ja että se on epästabiili vaikka yhtälöryhmän *kaikki* ratkaisut suppenevat sitä kohti.

4. Määritä yhtälön

$$\dot{x} = 1 + \mu x + x^2$$

tasapainopisteet a tutki niiden stabiilisuutta eri parametrin μ arvoilla. Piirrä bifurkaatiokuvio.

5. Määritä yhtälön

$$\dot{x} = x + \frac{\mu x}{1 + x^2}$$

tasapainopisteet a tutki niiden stabiilisuutta eri parametrin μ arvoilla. Piirrä bifurkaatiokuvio.