

Differentiaaliyhtälöt II

5. harjoitus, kevät 2016

1. Osoita, että $x(t) = \cos^2 t$ toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$\ddot{x}(t) + 2(1 - \tan^2 t)x(t) = 0$$

ja etsi yhtälön yleinen ratkaisu.

2. Osoita, että $x(t) = e^t$ toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = 0$$

jos ja vain jos $1 + p(t) + q(t) \equiv 0$. Ratkaise tämän nojalla

$$(t - 1)\ddot{x}(t) - t\dot{x}(t) + x(t) = 0.$$

3. Osoita, että jos funktiot ϕ_1 ja ϕ_2 ovat välillä (a, b) yhtälön

$$\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = 0$$

ratkaisuja, niin niiden Wronskin determinantti (kts. monisteen määritelmä 3.7, s.36) on

$$Ce^{-\int_{t_0}^t p(s)ds},$$

missä C on vakio.

4. Muodosta 2. kertaluvun homogeeninen lineaarinen skalaariyhtälö, jolla on yksityisratkaisuina kahdesti derivoituvat funktiot ϕ_1 ja ϕ_2 , joiden Wronskin determinantti on nolasta poikkeava.
5. Ratkaise edellinen tehtävä tapauksessa $\phi_1(t) = t$, $\phi_2(t) = \cos t$ ja määritä saadun yhtälön ratkaisuista se, jonka kuvaaja sivuaa suoraa $x = t+1$.