

Differentiaaliyhtälöt II

4. harjoitus, kevät 2016

1. Olkoon $A(t)$ 2×2 -matriisi. Onko mahdollista, että sekä $x_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix}$ että $x_2(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{4t} \end{pmatrix}$ toteuttavat yhtälön $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$?

2. Osoita, että $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ e^t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ on yhtälön

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ e^t & -1 \end{pmatrix} x(t).$$

perusjärjestelmä ja ratkaise yhtälö alkuehdolla

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. Olkoot

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos t & 1 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Määritä systeemin $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t)$ tilansiirtomatriisi ja ratkaise alkuarvot tehtävä

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Määritä yhtälön

$$t\ddot{x}(t) + 2x(t) = 0$$

yleinen ratkaisu muodossa $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-1)^n$.

5. Määritä yhtälön

$$(t^2 - 1)\ddot{x}(t) + t\dot{x}(t) - x(t) = 0$$

yleinen ratkaisu muodossa $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.