

Differentiaaliyhtälöt II

3. harjoitus, kevät 2016

1. Olkoon

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

missä a on reaalinen vakio. Muodosta matriisin $A(t)$ Peano-Bakerin sarja ja ratkaise alkuarvotettava

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad x(0) = (1 \ 0)^T.$$

2. Olkoon

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

Muodosta matriisin $A(t)$ Peano-Bakerin sarja ja ratkaise alkuarvotettava

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad x(0) = (1 \ 1)^T.$$

3. Olkoon

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ a & 0 \end{pmatrix},$$

missä a on reaalinen vakio.

- (a) Muodosta matriisin $A(t)$ Peano-Bakerin sarja.
- (b) Laske sarjan summan raja-arvo kun $a \rightarrow 0$.
- (c) Ratkaise yhtälö $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ kun $a = 0$.
- (d) Osoita, että kohtien (b) ja (c) tulokset ovat keskenään sopusoinnussa.

4. Määritellään funktiot $x_1 \in C(\mathbf{R})$, $x_2 \in C(\mathbf{R})$ seuraavasti:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \cos t, & t \in \mathbf{R}, \\ x_2(t) &= \sin t, & t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Osoita, että x_1 ja x_2 ovat lineaarisesti riippumattomia.

5. Määritellään funktiot $x_1, x_2, x_3 \in C(\mathbf{R})$ seuraavasti:

$$x_1(t) = \cos 2t, \quad t \in \mathbf{R},$$

$$x_2(t) = \sin^2 t, \quad t \in \mathbf{R},$$

$$x_3(t) = 1, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Osoita, että x_1, x_2 ja x_3 ovat lineaarisesti riippuvia.