DY II, 4. harjoitus

1. Olkoon $\Lambda(t)$ 2×2 - matriisi, ja $x_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix}$, $x_2(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{4t} \end{pmatrix}$.

Muodostetaan matriisi $X(t) = (x_1(t) \; x_2(t)) = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^{2t} & e^{4t} \end{pmatrix}$.

Tavoitteena on selvittää, voivatko x_1 ja x_2 molemmat olla yhtälön $\dot{x}(t) = \Lambda(t)x(t)$ ratkaisuja jollakin Λ.

Kannattaa huomata, että näin on jos ja vain jos matriisi X toteuttaa yhtälön

$$\dot{X}(t) = \Lambda(t)X(t), \qquad (1)$$

sillä $\dot{X}(t) = (\dot{x}_1(t) \; \dot{x}_2(t))$ ja $\Lambda(t)X(t) = (\Lambda(t)x_1(t) \; \Lambda(t)x_2(t))$.

Lasketaan

$$\det X(t) = e^t e^{4t} - e^{2t}e^{2t} = e^{4t}(e^t - 1) \neq 0, \text{ kun } t \neq 0.$$

Koska $X(t)$ on kääntyvä, kun $t \neq 0$, on olemassa Λ siten, että yhtälö (1) toteutuu kaikilla $t \neq 0$. (Valitaan vain $\Lambda(t) = \dot{X}(t)X(t)^{-1}$)

Toisaalta globaalia ratkaisua (eli kaikilla t) ei ole, ja tämä voidaan nähdä tarkastelemalla yhtälöä (1) kohdassa $t = 0$.

$$X(0) = \begin{pmatrix} e^0 & e^{2\cdot 0} \\ e^{2\cdot 0} & e^{4\cdot 0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2e^t \\ 2e^t & 4e^t \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Merkitään $\Lambda(0) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Silloin yhtälö (1) vaatii

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ eli } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix},$$

mikä on mahdotonta. Siispä x_1 ja x_2 eivät voi olla yhtälön $\dot{x} = \Lambda x$ globaaleja ratkaisuja millään Λ.

2. Tarkistetaan ensin, että $x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ e^t \end{pmatrix}$ ja $x_2 = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix}$ ovat yhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ e^t & -1 \end{pmatrix} x \qquad (2)$$

ratkaisuja:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ e^t & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix} = \dot{x}_1 \; ; \; \begin{pmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ e^t & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{x}_2$$

Tämän lisäksi x_1, x_2 ovat lineaarisesti riippumattomia, mikä nähdään Wronskin determinantista:

$$W(x_1,x_2)(t) = \begin{vmatrix} 2 & e^{-t} \\ e^t & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - e^t \cdot e^{-t} = 1 \neq 0 .$$

Siispä $\{x_1, x_2\}$ on yhtälön (2) perusjärjestelmä.

Yhtälön (2) kaikki ratkaisut voidaan kirjoittaa muodossa
$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$.

Alkuarvon $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ avulla voidaan ratkaista vakiot c_1, c_2:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ e^0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-0} \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 + c_2 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 3 \end{cases} .$$

Siten yhtälön (2) ratkaisu alkuarvolla $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ on

$$\boxed{x(t) = \begin{pmatrix} -2 + 3e^{-t} \\ -e^t + 3 \end{pmatrix}} .$$

DY II, 4. harjoitus

3. Tilan siirtomatriisi $\Phi(t) = \Phi(t,0)$ on matriisi, joka toteuttaa

$x(t) = \Phi(t)x_0$, kun x on yhtälön

$\dot{x}(t) = \Lambda(t)x(t)$ ratkaisu alkuarvolla $x(0) = x_0$.

Edellisissä laskuharjoituksissa määritimme joissakin erikoistapauksissa tilansiirtomatriisin Peano-Bakerin sarjana:

$$J_0(t) = I$$

$$J_n(t) = \int_0^t \Lambda(\tau) J_{n-1}(\tau)\,d\tau \quad ; \quad \Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(t)$$

Derivoimalla sarjaa termeittäin näemme

$$\dot{\Phi}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dot{J}_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(t) J_{n-1}(t) = \Lambda(t) \sum_{n=1}^{\infty} J_{n-1}(t) = \Lambda(t)\Phi(t)$$

Koska $\Lambda(s)\Lambda(t) = \Lambda(t)\Lambda(s)\ \forall t,s$, myös $t \mapsto \exp\left(\int_0^t \Lambda(\tau)d\tau\right)$ toteuttaa saman differentiaaliyhtälön samalla alkuarvolla ($\Phi(0) = I$), joten diff. yhtälön ratkaisujen yksikäsitteisyyden nojalla $\Phi(t) = \exp\left(\int_0^t \Lambda(\tau)d\tau\right)$.

Tämän laskemiseksi kirjoitetaan

$$\int_0^t \Lambda(\tau)d\tau = \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos\tau & 1 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} t & 0 \\ \sin t & t \end{pmatrix} = tI + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sin t & 0 \end{pmatrix} = tI + N(t)$$

ja huomataan, että $N^2 = 0$. Näin saadaan

$$\boxed{\Phi(t) = \exp(tI + N(t)) = e^t e^{N(t)} = e^t[I + N(t)] = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin t & 1 \end{pmatrix}}$$

Yhtälön

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos t & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ratkaisu on

$$x(t) = \Phi(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \Phi(t-\tau)\begin{pmatrix} \tau \\ 0 \end{pmatrix} d\tau = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \sin t \end{pmatrix} + \int_0^t e^{t-\tau} \begin{pmatrix} \tau \\ \tau \sin(t-\tau) \end{pmatrix} d\tau$$

$$\boxed{x(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - t - 1 \\ e^t\left(1 + \sin t - \frac{\cos t}{2}\right) + \frac{t+1}{2} \end{pmatrix}}$$

4. Ideana on esittää x sarjakehitelmänä, ja johtaa yhtälöstä rekursiivinen relaatio sarjakehitelmän kertoimille. Oletetaan siis, että yhtälöllä

$$t x''(t) + 2x(t) = 0$$

on sarjakehitelmänä $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-1)^n$ esitettävä ratkaisu. Silloin

$$x''(t) = \sum_{n=2} n(n-1)a_n (t-1)^{n-2} \implies t x''(t) = (t-1)x''(t) + x''(t)$$

$$= \sum_{n=2} n(n-1)a_n (t-1)^{n-1} + \sum_{n=2} n(n-1)a_n (t-1)^{n-2} =$$

$$= \sum_{n=1} (n+1)n\, a_{n+1} (t-1)^n + 2a_2 + \sum_{n=1} (n+2)(n+1)a_{n+2} (t-1)^n$$

$$= 2a_2 + \sum_{n=1} \left[(n+1)n\, a_{n+1} + (n+2)(n+1)a_{n+2}\right](t-1)^n .$$

Sarjakehitelmä toteuttaa siis

$$t x'' + 2x = 2a_2 + 2a_0 + \sum_{n=1} \left[(n+1)n\, a_{n+1} + (n+2)(n+1)a_{n+2} + 2a_n\right](t-1)^n = 0 \quad \forall t$$

Jotta kyseinen lauseke häviäisi kaikilla t, kaikkien kertoimien täytyy hävitä; saamme ehdot

$$\begin{cases} a_2 + a_0 = 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)n\, a_{n+1} + 2a_n = 0 , \quad n \geq 1 . \end{cases}$$

Tässä parametrit a_0 ja a_1 ovat vapaita (vastaavat alkuarvoja) ja muut määräytyvät rekursiivisesti näistä.

Mikäli teemmekin yritteen $x(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$ yhtälö saa muodon

$$\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n t^{n-1} + \sum_{n\geq 0} 2a_n t^n \equiv 0 \iff 2a_0 + \sum_{n\geq 1} \left[(n+1)n\, a_{n+1} + 2a_n\right] t^n \equiv 0,$$

josta $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = -\frac{2}{(n+1)n} a_n , \; n \geq 1 . \end{cases}$ Tästä voimme todistaa induktiolla

$$a_n = \frac{(-2)^{n-1}}{n((n-1)!)^2} a_1$$

5. Ratkaistaan yhtälö

$$(t^2-1)x'' + tx' - x = 0$$

yritteellä $x(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$. Saadaan

$$t^2 \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n t^{n-2} - \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n t^{n-2} + t\sum_{n\geq 1} na_n t^{n-1} - \sum_{n\geq 0} a_n t^n = 0,$$

joka voidaan kirjoittaa muodossa

$$-2a_2 - a_0 + (-3\cdot 2a_3 + 1\cdot a_1 - a_1)t + \sum_{n\geq 2} \underbrace{[n(n-1)a_n - (n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n - a_n]}_{=(n^2-1)a_n - (n+2)(n+1)a_{n+2}} t^n = 0.$$

Tästä saadaan kertoimille ehdot

$$\begin{cases} a_0 + 2a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ (n^2-1)a_n - (n+2)(n+1)a_{n+2} = 0, n\geq 2 \end{cases} \quad \text{eli} \quad \begin{cases} a_2 = -\frac{a_0}{2} \\ a_3 = 0 \\ a_{n+2} = \frac{n-1}{n+2} a_n \quad, n\geq 2 \end{cases}.$$

Ehdosta $a_3 = 0$ ja rekursiivisesta kaavasta seuraa heti, että $a_5 = \frac{2}{5}\cdot a_3 = 0$, $a_7 = \frac{4}{7} a_5 = 0$, ja yleisesti $a_{2k-1} = 0$, kun $k\geq 2$.

Parillisille indekseille $n = 2k$ sen sijaan

$$a_{n+2} = \frac{n-1}{n+2} a_n = \frac{n-1}{n+2}\frac{n-3}{n} a_{n-2} = \underbrace{\frac{n-1}{n+2}\cdot\frac{n-3}{n}\cdot\frac{n-5}{n-2}\cdots\frac{n-(2k-3)}{n+2-2k}}_{k \text{ kpl}} a_2$$

eli $a_{2k+2} = \frac{1\cdot 3\cdots(2k-3)}{2\cdot 4\cdots(2k)} a_2$.

Sarjakehitelmä voidaan esittää muodossa

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \sum_{k=1} \frac{1\cdot 3\cdots(2k-3)}{2\cdot 4\cdots(2k)} a_2 t^{2k+2}, \text{ eli}$$

$$\boxed{x(t) = a_0 + a_1 t - \frac{a_0}{2}t^2\left(1 + \sum_{k\geq 1} \frac{1\cdot 3\cdots(2k-3)}{2\cdot 4\cdots(2k)} t^{2k}\right).}$$