Diff. Yhtälöt II, Harj. 1 (By Anssi Mirka)

① Ratkaise $\dot{x}(t) = A\, x(t)$,
ja piirrä faasikuvio.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

"Johdatus": Koska $\frac{d}{dt}(e^{At}) = A e^{At}$,
niin näemme, että $t \mapsto e^{At}x_0$ on ratkaisu AAT:lle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Mutta miten laskemme sarjan $e^{At}x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n x_0}{n!} t^n$?

Tämä ei yleisesti onnistu. Kuitenkin jos $Ax_0 = \lambda x_0$
jollakin $\lambda \in \mathbb{C}$, niin silloin myös $A^k x_0 = \lambda^k x_0$, ja

$$e^{At}x_0 = \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n x_0}{n!} t^n = e^{\lambda t} x_0 \;!$$

Tämän vuoksi ominaisvektorit ovat "helppoja" alkuarvoja.

Ratkaisu: Etsimme siis vektoreita x joilla löytyy $\lambda \in \mathbb{C}$
siten, että $Ax = \lambda x$, eli

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 4x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} \iff \ldots$$

$$\dots \begin{cases} x_1 + x_2 = \lambda x_1 \\ 4x_1 + x_2 = \lambda x_2 \end{cases}$$

Ensimmäisestä saa ratkaistua $\underline{x_2 = (\lambda - 1)x_1}$.

Kun tämän sijoittaa toiseen saamme

$$4x_1 + (\lambda-1)x_1 = \lambda(\lambda-1)x_1$$

$$\Leftrightarrow (\lambda^2 - 2\lambda - 3)x_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \quad \text{tai} \quad x_1 = 0 .$$

Koska $x_1 = 0$ tarkoittaisi, että myös $x_2 = (\lambda-1)x_1 = 0$, saamme triviaalin ratkaisun. Epätriviaaleja ratkaisuja on olemassa jos ja vain jos

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\lambda_1 = 3} \quad \text{tai} \quad \underline{\lambda_2 = -1} .$$

Näistä saadaan heti vastaavat ominaisvektorit:

$\underline{\lambda_1 = 3}$: $x_2 = (3-1)x_1$ joten $\underline{x_{\lambda_1} := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}$

$\underline{\lambda_2 = -1}$: $x_2 = (-1-1)x_1$ joten $\underline{x_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}}$

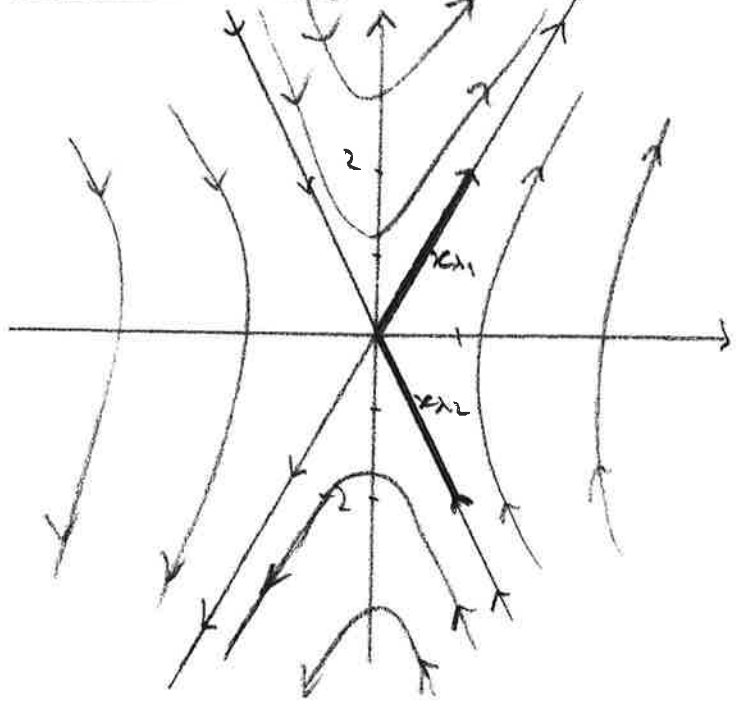
x_{λ_1} ja x_{λ_2} ovat riippumattomat joten mikä tahansa alkuarvo $x_0 \in \mathbb{R}^2$ voidaan esittää $x_0 = c_1 x_{\lambda_1} + c_2 x_{\lambda_2}$ joll. $c_i \in \mathbb{R}$. Tällöin $x(t) := c_1 e^{\lambda_1 t} x_{\lambda_1} + c_2 e^{\lambda_2 t} x_{\lambda_2}$ on ratkaisu AAT:lle $\begin{cases} \dot{x} = A x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$, sillä

$$\frac{d}{dt}\left(c_1 e^{\lambda_1 t} x_{\lambda_1} + c_2 e^{\lambda_2 t} x_{\lambda_2}\right) = c_1 e^{\lambda_1 t} \overbrace{\lambda_1 x_{\lambda_1}}^{A x_{\lambda_1}} + c_2 e^{\lambda_2 t} \overbrace{\lambda_2 x_{\lambda_2}}^{A x_{\lambda_2}}$$

$$= A\left(c_1 e^{\lambda_1 t} x_{\lambda_1} + c_2 e^{\lambda_2 t} x_{\lambda_2}\right).$$

...

Faasikuva !



b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

Etsitään taas om. vektoreita, eli ratkaistaan

$Ax = \lambda x$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2(\lambda - 1)x_1 \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 = \lambda x_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \frac{1}{2}x_1 + 2(\lambda-1)x_1 = 2\lambda(\lambda-1)x_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2(\lambda-1)x_1 \\ (4\lambda^2 - 8\lambda + 3)x_1 = 0 \end{cases}$$

Kuten edellä $x_1 = 0$ ($\Leftrightarrow x_2 = 0$) antaa triviaali ratkaisun. Meitä kiinnostaa milloin

$4\lambda^2 - 8\lambda + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\lambda_1 = \frac{3}{2}}, \quad \underline{\lambda_2 = \frac{1}{2}}$

Vastaavat om. vektorit ovat

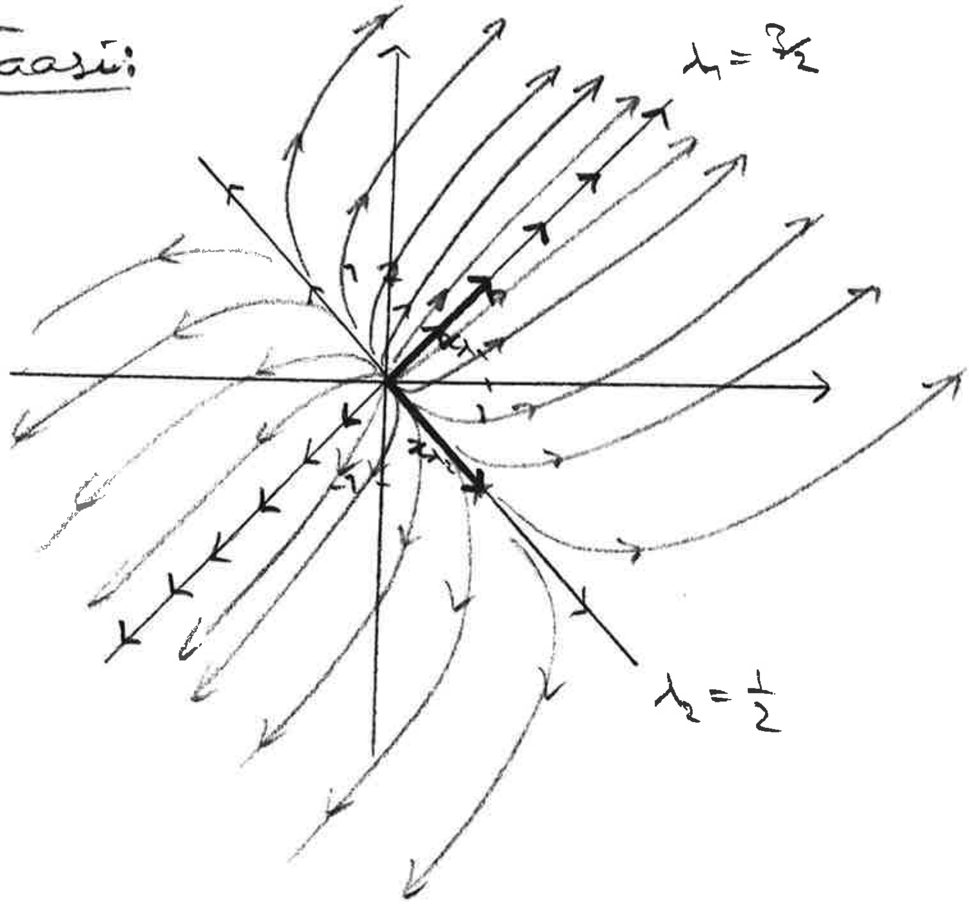
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ 2(\lambda_1 - 1)x_1 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} x_1 \quad \text{ja} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ 2(\lambda_2 - 1)x_1 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}} x_1 .$$

Täten lineaarikombinaatio $c_1 e^{\lambda_1 t} x_{\lambda_1} + c_2 e^{\lambda_2 t} x_{\lambda_2}$ on ratkaisu AAT:lle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) \\ x(0) = c_1 x_{\lambda_1} + c_2 x_{\lambda_2} \end{cases},$$

eli $(e^{\lambda_1 t} x_{\lambda_1}, e^{\lambda_2 t} x_{\lambda_2})$ on perusjärjestelmä. ...

... Faasi:



Selitys: Koska $\lambda_2 > \lambda_1$ niin termi $e^{\lambda_1 t}$ dominoi ratkaisussa $t \mapsto c_1 e^{\lambda_1 t} x_{\lambda_1} + c_2 e^{\lambda_2 t} x_{\lambda_2}$ kun $t \to \infty$. (ellei $c_1 = 0$)

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$Ax = \lambda x \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x_2 = (\lambda - 1) x_1 \\ (\lambda^2 - 4\lambda + 4) x_1 = (\lambda - 2)^2 x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{tai} \quad \underline{\lambda = 2} \text{ ja } x = \underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} x_1$$

Saimme siis vain yhden ratkaisun: $t \longmapsto e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

toteuttaa AAT:n $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$.

Mistä saamme toisen, riippumattoman, ratkaisun?

<u>Strategia:</u>

Periaatteessa $e^{tA} x_0 := x_0 + Ax_0 t + \frac{A^2 x_0}{2!} t^2 + \ldots$

tarjoaa edelleen ratkaisun AAT:lle $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$.

Jos haluamme ilmaista $e^{tA} x_0$:n "suljetussa muodossa", meidän pitää löytää/valita x_0 niin että ääretön sarja "muuttuu" äärelliseksi.

. . .

... Idea: Voimme kirjoittaa $e^{tA}x_0$:n myös muodossa

$$e^{At}x_0 = e^{\lambda t} \cdot e^{(A-\lambda \mathbb{1})t}x_0$$

$$= e^{\lambda t}\left(x_0 + (A-\lambda \mathbb{1})x_0 t + \frac{(A-\lambda \mathbb{1})^2 x_0}{2!} t^2 + \dots \right)$$

Jos $(A-\lambda \mathbb{1})^k x_0 = 0$ jollakin k, niin

$(A-\lambda \mathbb{1})^m x_0 = 0 \quad \forall m \geq k$, eli

sarja $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A-\lambda \mathbb{1})^n x_0}{n!} t^n$ on äärellinen $\sum_{n=0}^{k} \frac{(A-\lambda \mathbb{1})^n x_0}{n!} t^n$

ja sen voi laskea auki. Etsimme siis n.k. yleistettyjä om. vektoreita x joilla löytyy λ ja $k \in \mathbb{N}$ s.e. $(A-\lambda \mathbb{1})^k x = 0$.

<u>Huomio</u>: Jos $(A-\lambda \mathbb{1})^k x = 0$, niin

$(A-\lambda \mathbb{1})\left((A-\lambda \mathbb{1})^{k-1} x\right) = 0$, joten $(A-\lambda \mathbb{1})^{k-1} x$

on <u>tavallinen</u> ominaisvektori (olettaen, että $(A-\lambda \mathbb{1})^{k-1} x \neq 0$).

Siispä jos λ on yleistetty om. arvo, se on myös tavallinen om. arvo.

<u>Ratkaisu</u>: Koska $\lambda = 2$ on ainoa om. arvo, se on ainoa mahdollinen yleistetty om. arvo. Ratkaisemme yhtälön

$$(A-2\mathbb{1})^2 x = \bar{0} \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 x = \bar{0} \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\iff x \in \mathbb{R}^2, \dots$

... Eli mikä tahansa $\mathbb{R}^2$:n vektori on $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$:n yleistetty om. vektori.

Saadaksemme riippumattoman ratkaisun voimme valita mielivaltaisen alkuarvon x_0 kunhan se on riippumaton ominaisvektorista $x_\lambda = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, esim $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Nyt voimme laskea

$$e^{At}x_0 = e^{2t}e^{(A-2I)t}x_0$$

$$= e^{2t}\left(x_0 + (A-2I)x_0 t + \overbrace{\frac{(A-2I)^2}{2!}}^{=0}x_0 t + \overbrace{\dots}^{=0}\right)$$

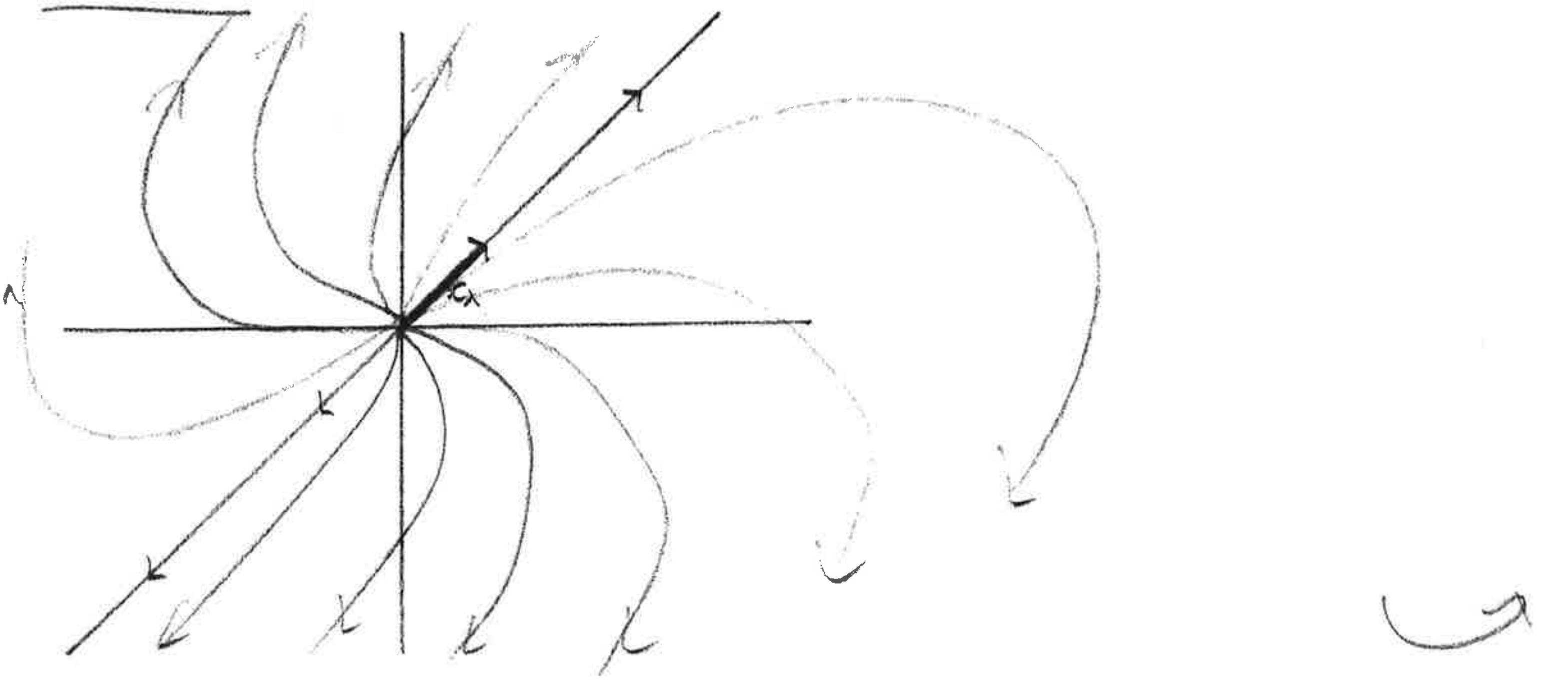
$$= e^{2t}\left(x_0 + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x_0 t\right)$$

$$= e^{2t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ -t \end{pmatrix}\right)$$

$$= e^{2t}\begin{pmatrix} 1-t \\ -t \end{pmatrix}.$$

Eli yksi perusjärjestelmä on $\left(e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, e^{2t}\begin{bmatrix} 1-t \\ -t \end{bmatrix}\right)$.

Faasi:



... Selitys Faasikuviolle:

Yleinen ratkaisu voidaan esittää kombinaationa

$$c_1 e^{2t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{bmatrix}1-t\\-t\end{bmatrix}.$$

Jos $c_2 = 0$, ratkaisu elää om. avaruudessa.

Jos $c_2 > 0$, niin "$c_1 e^{2t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{bmatrix}1-t\\-t\end{bmatrix} \approx \underline{\underline{c_2 e^{2t}\begin{bmatrix}-t\\-t\end{bmatrix}}}$"

kun $t \gg 1$, eli dynamiikka "liikkuu" suuntaan

$\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$.

Jos $c_2 < 0$, niin (edelleen)

$c_1 e^{2t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{bmatrix}1-t\\-t\end{bmatrix} \approx c_2 e^{2t}\begin{bmatrix}-t\\-t\end{bmatrix}$, kun $t \gg 1$,

eli dynamiikka liikkuu suuntaan $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$. ($c_2 < 0$).

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Esitellään vaihtoehtoinen lähestymistapa:

$Ax = \lambda x \iff (A - \lambda \mathbb{1})x = 0$,

Joten $Ax = \lambda x$ jollakin x $\overbrace{\text{jos ja vain jos}}^{\text{"joss"}}$

$\mathrm{Ker}(A - \lambda \mathbb{1}) \neq \{0\}$ joss $A - \lambda \mathbb{1}$ ei ole injektio

joss $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$.

On siis mahdollista etsiä om. arvot ennen om. vektoreita.

Ratkaisu: Etsimme $\lambda \in \mathbb{C}$ jolla

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(3-\lambda) + 2 \cdot 3$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 9,$$

on nolla. Saamme juuret $\lambda_\pm = 2 \pm i\sqrt{5}$.

Kuten edellä, voimme ratkaista yhtälön

$$Ax = \lambda_\pm x \iff \begin{cases} x_1 + 3x_2 = \lambda_\pm x_1 \\ -2x_1 + 3x_2 = \lambda_\pm x_2 \end{cases}$$

josta löydämme om. vektorit $x_\pm = \begin{bmatrix} x_1 \\ (\lambda_\pm - 1)x_1/3 \end{bmatrix}$.
Valitsemalla $x_1 = 3$, kiinnitämme.

$x_+ := \begin{bmatrix} 3 \\ 1 + i\sqrt{5} \end{bmatrix}$ ja $x_- := \begin{bmatrix} 3 \\ 1 - i\sqrt{5} \end{bmatrix}$ ...

... Näin ollen meillä on kaksi kompleksista ratkaisua:

$$x_+(t) := e^{\lambda_+ t}\begin{bmatrix} 3 \\ 1+i\sqrt{5}\end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad x_-(t) := e^{\lambda_- t}\begin{bmatrix} 3 \\ 1-i\sqrt{5}\end{bmatrix}.$$

Kompleksisuudessa ei sinänsä ole mitään vikaa, mutta jos esim. tutkimme populaatiomalleja, haluaisimme reaalisia ratkaisuja.

Koska A on reaalinen (joten $A^n \in \mathbb{R}^{2\times 2}\ \forall n$), niin yleinen ratkaisu

$$e^{At}x_0 := \sum_{n\geq 0} \frac{A^n x_0}{n!} t^n$$

on reaalinen (eli $e^{At}x_0 \in \mathbb{R}^2$) kaikilla $t \geq 0$ jos alkuarvo x_0 on reaalinen.

Täten meidän riittää löytää lineaarikombinaatio $c_1x_+ + c_2x_-$ kompleksisista om. vektoreista x_+, x_- siten että

$$c_1x_+ + c_2x_- = \begin{bmatrix} c_1 3 + c_2 3 \\ c_1(1+i\sqrt{5}) + c_2(1-i\sqrt{5})\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\Leftrightarrow \quad c_1 + c_2 + i(c_1 - c_2)\sqrt{5} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad c_1 + c_2 \in \mathbb{R} \quad \text{ja} \quad i(c_1 - c_2) \in \mathbb{R}$$

Voimme valita esim. $c_1 = c_2 = 1$ jolloin saamme alkuarvon $y_1 = x_+ + x_- = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$. Toiseksi riippumattomaksi kombinaatioksi valitsemme $c_1 = i$ ja $c_2 = -i$ (jolloin $c_1 + c_2 = 0$, $i(c_1 - c_2) = -2$)...

... joka tuottaa alkuarvon

$$y_2 = i x_+ - i x_- = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Lineaarisuuden perusteella (tai suoraan laskemalla) tiedämme nyt, että kombinaatio

$$y_1(t) := e^{\lambda_+ t} x_+ + e^{\lambda_- t} x_-$$

$$= e^{2t} \underbrace{\left(e^{i\sqrt{5}t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 + i\sqrt{5} \end{bmatrix} + e^{-i\sqrt{5}t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 - i\sqrt{5} \end{bmatrix} \right)}$$

$$\underbrace{\left(e^{i\sqrt{5}t} + e^{-i\sqrt{5}t} \right)}_{2\cos(\sqrt{5}t)} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \underbrace{i\left(e^{i\sqrt{5}t} - e^{-i\sqrt{5}t} \right)}_{-2\sin(\sqrt{5}t)} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$= 2e^{2t} \left\{ \cos(\sqrt{5}t) \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \sin(\sqrt{5}t) \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{bmatrix} \right\}$$

on ratkaisu alkuarvolla $y_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Samoin

$$y_2(t) := i e^{\lambda_+ t} x_+ - i e^{\lambda_- t} x_-$$

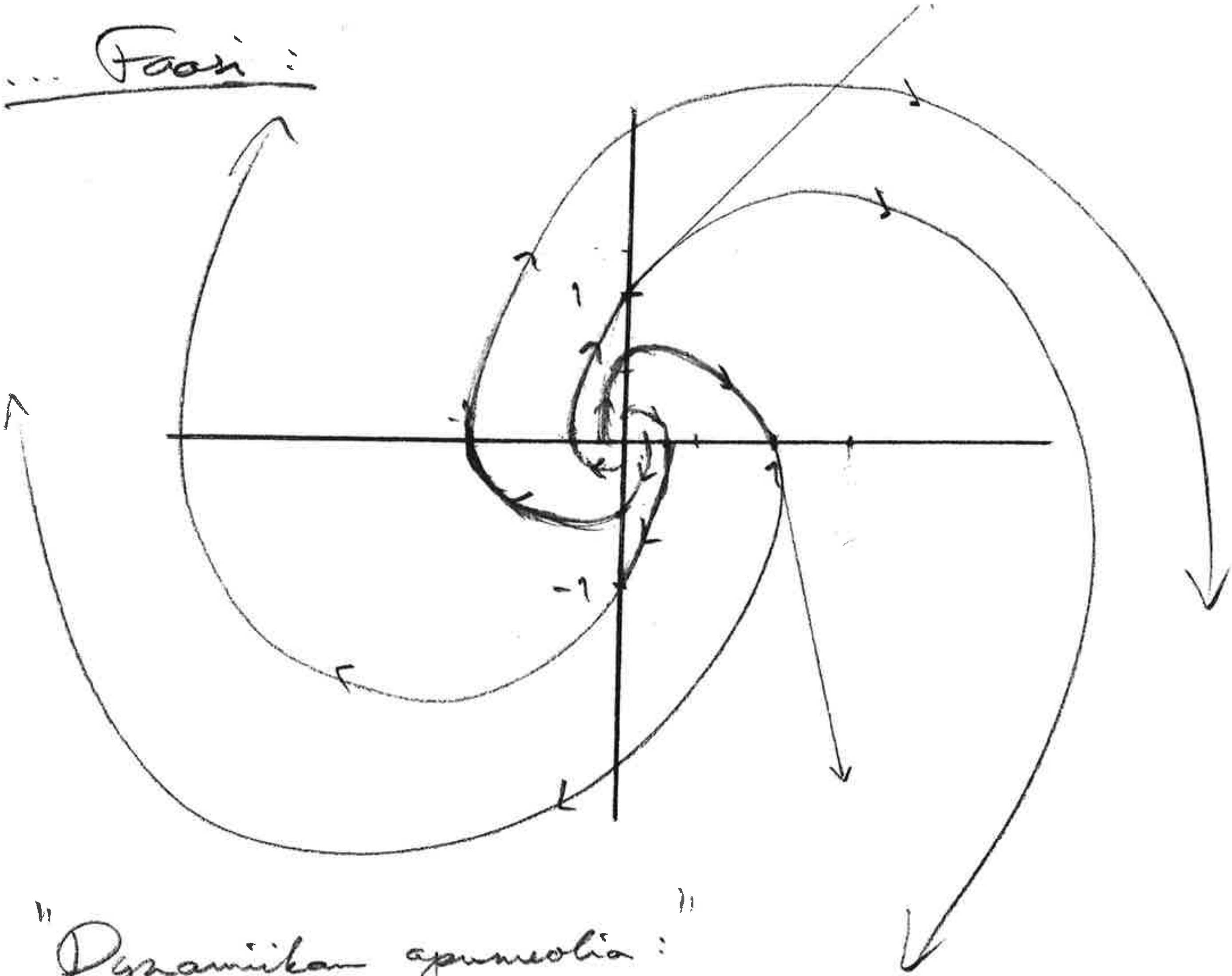
$$\vdots$$

$$= 2e^{2t} \left\{ -\sin(\sqrt{5}t) \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \cos(\sqrt{5}t) \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{bmatrix} \right\}.$$

$(y_1(t), y_2(t))$ on reaalinen p.j.

Btw. $(e^{\lambda_+ t} x_+, e^{\lambda_- t} x_-)$ on myös p.j. muttei reaalinen

... Faasi :



"Dynamiikan apuneuvoja:"

$$\dot{x}(0) = A \underbrace{x(0)}_{x_0} = \begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{01}\\ x_{02}\end{pmatrix}$$

kertoo alkunopeuden alkuarvolla x_0.

Esim. jos $x_0 = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$ niin $\dot{x}(0) = \begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$.

jos $x_0 = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ niin $\dot{x}(0) = \begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\ 3\end{pmatrix}$

Ja koska omin. arvojen reaaliosa on > 0 niin dynamiikka loittonee origosta.

② Ratkaise $\dot{x} = \Lambda x$, kun

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbb{1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ & & \ddots & 1 & 0 \\ & 0 & & & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}}_{=:N}$$

Miksi Λ on kiinnostava???

Olemme nähneet, että om. vektoreita voi olla vähemmän kuin avaruuden dimensio. "Pahin" mahdollinen tilanne on että matriisilla M on vain yksi om. vektori (ja täten vain yksi om. arvo). Λ edustaa tällaista tilannetta; itse asiassa eräs yleinen tulos (Jordan's decomposition) kertoo, että kyseinen "hankala" matriisi M voidaan kannan vaihdolla tuoda muotoon joka on hyvin lähellä Λ:aa:

$$P^{-1}MP = \lambda \mathbb{1} + N = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$, missä P on "kannanvaihto"

ja λ on M:än ainoa ominaisarvo.

Tehtävämme $\dot{x} = \Lambda x$ on kannanvaihtoa vaille "pahin mahdollinen degeneraatio".

Ratkaisu: Samalla tavalla ratkaisemme tuon yleisemmän tilanteen, eli olkoon $\underline{A = \lambda \mathbb{1} + N}$.

Tiedämme, että $e^{At}x_0 = \sum_{n \geq 0} \frac{A^n x_0}{n!} t^n$ on ratkaisu AAT:lle $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$. On helppo osoittaa, binomikaavaa käyttämällä, että

$$e^{At} = e^{(\lambda \mathbb{1} + N)t} = \sum_{n \geq 0} \frac{\overbrace{(\lambda \mathbb{1} + N)^n}^{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k N^{n-k}}}{n!} t^n$$

$$\vdots$$

$$= e^{\lambda t} e^{Nt}.$$

Eli ongelma on enää esittää e^{Nt} "äärellisessä muodossa".

Mitä N tekee? Esimerkki

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix}$$

eli "N siirtää matriisin sarakkeita oikealle, ja nollaa ensimmäisen sarakkeen." (Todista yleisesti jos haluat.)

Niinpä jos $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \cdots \quad N^{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

... ja $N^k = 0$ kaikilla $k \geq n = \dim(\mathbb{R}^n)$.

Nyt osaamme laskea e^{Nt}:n :

$$e^{Nt} = \mathbb{1} + Nt + \frac{N^2}{2!}t^2 + \dots + \frac{N^{n-1}}{(n-1)!}t^{n-1} + 0 + 0 + \dots$$

$$= \mathbb{1} + \begin{bmatrix} 0 & t & & 0 \\ & \ddots & t & \\ & & \ddots & t \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & t^2/2 & 0 \\ & 0 & 0 & \ddots \\ & & \ddots & t^2/2 \\ & & & 0 \\ 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix} + \dots \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & t^{n-1}/(n-1)! \\ & \ddots & & 0 \\ & & & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore e^{At} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 & \cdots & t^{n-1}/(n-1)! \\ & \ddots & t & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & t^2/2 \\ & & & \ddots & t \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$$