DY II, harjoitus 2

1.a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ Määritetään e^{tA}. Cayley-Hamiltonin lauseen nojalla e^{tA} on muotoa $e^{tA} = \alpha_0(t) I + \alpha_1(t) A$.

$\det(A - \lambda I) = -\lambda(-\lambda - 3) + 2 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \iff \begin{matrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{matrix}$

Olkoot u_1, u_2 näihin liittyvät ominaisvektorit.

Saamme identiteetit

$$e^{-t} u_1 = e^{tA} u_1 = (\alpha_0 I + \alpha_1 A) u_1 = \alpha_0 u_1 + \alpha_1 (-1) u_1$$
$$e^{-2t} u_1 = e^{tA} u_2 = (\alpha_0 I + \alpha_1 A) u_2 = \alpha_0 u_2 + \alpha_1 (-2) u_2 ,$$

joista yhtälöparin
$$\begin{cases} e^{-t} = \alpha_0 - \alpha_1 \\ e^{-2t} = \alpha_0 - 2\alpha_1 \end{cases}$$

Tämän ratkaisemalla saadaan
$$\begin{cases} \alpha_0(t) = 2e^{-t} - e^{-2t} \\ \alpha_1(t) = e^{-t} - e^{-2t} \end{cases},$$

$$\Rightarrow e^{tA} = (2e^{-t} - e^{-2t}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (e^{-t} - e^{-2t}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Yhtälön $\dot{x} = Ax$ yleinen ratkaisu on siis

$$x(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-t} - e^{-2t} \\ -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

2.a) Alkuarvolla $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ratkaisu on

$$x(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e^{-t} - 3e^{-2t} \\ -4e^{-t} + 6e^{-2t} \end{pmatrix}$$

1.b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Selvitetään matriisin ominaisarvot

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \implies \begin{matrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 3. \end{matrix}$$

Näillä on ominaisvektorit u_1, u_2. Kirjoitetaan taas e^{tA} muodossa

$$e^{tA} = \alpha_0(t) I + \alpha_1(t) A,$$

ja saadaan identiteetit

$$e^{-t} u_1 = e^{tA} u_1 = \alpha_0 u_1 + \alpha_1 A u_1 = (\alpha_0 - \alpha_1) u_1$$
$$e^{3t} u_2 = e^{tA} u_2 = \alpha_0 u_2 + \alpha_1 A u_2 = (\alpha_0 + 3\alpha_1) u_1.$$

Tästä saadaan taas yhtälöpari

$$\begin{cases} \alpha_0 - \alpha_1 = e^{-t} \\ \alpha_0 + 3\alpha_1 = e^{3t}, \end{cases} \text{ josta } \quad \begin{matrix} \alpha_0(t) = \frac{1}{4}(e^{3t} - e^{-t}) \\ \alpha_1(t) = \frac{1}{4}(e^{3t} + 3e^{-t}) \end{matrix}$$

Siis

$$e^{tA} = \frac{1}{4}(e^{3t} - e^{-t})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}(e^{3t} + 3e^{-t})\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{3t} + e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} & e^{3t} + e^{-t} \end{pmatrix}$$

Yleinen ratkaisu yhtälöön $\dot{x} = Ax$ on

$$x(t) = \frac{c_1}{2}\begin{pmatrix} e^{3t} + e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} \end{pmatrix} + \frac{c_2}{2}\begin{pmatrix} e^{3t} - e^{-t} \\ e^{3t} + e^{-t} \end{pmatrix}$$

2.b) Alkuarvolla $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ yhtälön ratkaisu on

$$x(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{3t} + e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} & e^{3t} + e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3e^{3t} - e^{-t} \\ 3e^{3t} + e^{-t} \end{pmatrix}$$

1.c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Tällä kertaa matriisilla on kaksinkertainen ominaisarvo:

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 = 0 .$$

Huomataan, että

$$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0 .$$

Matriisin e^{tA} voi edelleen määrittää edellisten kohtien keinolla, käyttäen Cayley–Hamilton lausetta sekä yleistettyjä om.vektoreita.
Johtuen identiteetistä $(A-2I)^2 = 0$ on kuitenkin helpompi keino:

$$e^{tA} = e^{2t} e^{t(A-2I)} = e^{2t}\left[I + t(A-2I) + \frac{t^2 (A-2I)^2}{2!} + \dots \right] = e^{2t}\left[I + t(A-2I) \right]$$

Saamme

$$e^{tA} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Yhtälön $\dot{x} = Ax$ yleinen ratkaisu on silloin

$$x(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.c) Alkuarvoilla $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ saamme

$$x(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1+2t \\ 2 \end{pmatrix}$$

1.d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Kuten c)-kohdassa, osoittautuu, että matriisilla on vain yksi ominaisarvo:

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^3 = 0,$$

Edelleen huomataan, että

$$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0.$$

Siispä saamme taas laskettua e^{tA}:n helposti:

$$e^{tA} = e^{2t} e^{t(A-2I)} = e^{2t}\left[I + t(A-2I) + \frac{t^2(A-2I)^2}{2!} + \dots\right] = e^{2t}\left[I + t(A-2I)\right]$$

$$e^{tA} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Yhtälön $\dot{x} = Ax$ yleinen ratkaisu on

$$x(t) = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.d) alkuarvolla $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ratkaisu on

$$x(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1+2t \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$