Diff. Yhtälöt II, Harj. 2. (By Anssi)

① $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & a \end{pmatrix}$, missä $a \in \mathbb{R}$.

Ratkaistaan alkuarvotehtävä (AAT)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) & , t \geq 0 \\ x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Johdanto: Kuten OY-lauseen todistuksessa muutetaan AAT yhtäpitävään integraaliyhtälöön (IY)

$$x(t) = x(0) + \int_0^t A(s)x(s)\,ds$$

Huomataan, että IY on "rekursiivinen" x:n suhteen!

Iteroidaan:

$$x(t) = x(0) + \underbrace{\int_0^t A(s_1)\left(x(0) + \int^{s_1} A(s_2)x(s_2)\,ds_2\right)ds_1}_{\int_0^t A(s_1)\,ds_1\,x(0) + \int_0^t A(s_1)\int_0^{s_1} A(s_2)\,x(s_2)\,ds_2}$$

Joka on jälleen rekursiivinen. Tätä voi jatkaa "äärettömästi" jolloin päädymme esitykseen...

... joka ei enää ole rekursiivinen!

$$x(t) = \Big\{ \mathbb{1} + \int_0^t A(s_1)\,ds_1 + \int_0^t A(s_1) \int_0^{s_1} A(s_2)\,ds_2\,ds_1 + \dots$$

$$\dots + \int_0^t A(s_1) \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_n} A(s_n)\,ds_n \cdots ds_1 + \dots \Big\}\, x(0)$$

Sulkuissa "{ }" olevaa matriisisarjaa kutsutaan <u>Peano-Bakerin</u> sarjaksi. Kunhan pätee

$\sup_{t \le T} \|A(t)\| < \infty$, niin se suppenee $\mathbb{R}^{n \times n}$:ssä.

<u>Huom</u>: Jos $A(t) \equiv A$, $\forall t$, niin P-B sarja palautuu matriisi exponenttiin:

$$\mathbb{1} + \underbrace{\int_0^t A\,ds_1}_{At} + \underbrace{\int_0^t A \int_0^{s_1} A\,ds_2\,ds_1}_{A^2 \frac{t^2}{2}} + \underbrace{\int_0^t A \int_0^{s_1} A \int_0^{s_2} A\,ds_3\,ds_2\,ds_1}_{A^3 \frac{t^3}{3!}} + \dots$$

$$= \sum_{k \ge 0} \frac{A^k}{k!} t^k =: e^{At}$$

Teht. 1 Ratkaisu:

Evaluoidaan Peano-Baker alkuarvossa $x(0)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

$$x(t) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \underbrace{\int_0^t \underbrace{\begin{pmatrix}1 & s\\0 & a\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}} ds}_{\begin{bmatrix}t\\0\end{bmatrix}} + \underbrace{\int_0^t \underbrace{\begin{pmatrix}1 & s_1\\0 & a\end{pmatrix} \underbrace{\int_0^{s_1}\begin{pmatrix}1 & s_2\\0 & a\end{pmatrix} ds_2}_{\begin{bmatrix}s_1\\0\end{bmatrix}}}_{\begin{bmatrix}s_1\\0\end{bmatrix}} ds_1}_{\begin{bmatrix}t^2/2\\0\end{bmatrix}} + \cdots$$

$$= \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}t\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}t^2/2\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}t^3/3!\\0\end{bmatrix} + \cdots$$

$$= \begin{bmatrix}e^t\\0\end{bmatrix}$$

Voimme tarkistaa:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}e^t\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^t\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & \alpha(t)\\0 & \beta(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^t\\0\end{bmatrix},$$

missä $\alpha(t), \beta(t)$ voivat olla "mitä vain", esim. t ja a.

Done.

② $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$, $t \geq 0$.

Tiedämme, että AAT:n $\begin{cases} \dot{x} = A(t)x \\ x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$ ratkaisu saadaan sarjalla

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} ds + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_1 & 1 \end{pmatrix} \int_0^{s_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} ds_2\, ds_1$$

$$+ \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_1 & 1 \end{pmatrix} \int_0^{s_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_2 & 1 \end{pmatrix} \int_0^{s_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_3 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} ds_3\, ds_2\, ds_1 + \cdots$$

<u>Lasketaan</u>:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} .$$ (Nollas termi)

$$\int_0^t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 1 \\ s+1 \end{bmatrix}} ds = \underline{\begin{bmatrix} t \\ t^2/2 + t \end{bmatrix}}$$

$$\underbrace{\int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_1 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\int_0^{s_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} ds_2}_{\begin{bmatrix} s_1 \\ s_1^2/2 + s_1 \end{bmatrix}}}_{\begin{bmatrix} s_1 \\ s_1^2 + s_1^2/2 + s_1 \end{bmatrix}} ds_1 = \underline{\begin{bmatrix} t^2/2 \\ \frac{t^3}{3} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}}$$

Kolmas termi :

$$\int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_1 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} s_1^2/2 \\ s_1^3/3 + s_1^3/3! + s_1^2/2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} t^3/3! \\ \frac{t^4}{2\cdot 4} + \frac{t^4}{3\cdot 4} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^3}{3!} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s_1^2/2 \\ \frac{s_1^3}{2} + \frac{s_1^3}{3} + \frac{s_1^3}{3!} + \frac{s_1^2}{2} \end{bmatrix}$$

$\vdots$

n:s termi :

$$\begin{bmatrix} t^n/n! \\ \underbrace{\frac{n}{(n+1)!} t^{n+1} + \frac{n-1}{(n+1)!} t^{n+1} + \dots + \frac{1}{(n+1)!} t^{n+1}} + \frac{t^n}{n!} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1+2+3+\dots+n}{(n+1)!} t^{n+1} = \frac{n(n+1)}{2(n+1)!} t^{n+1}$$

Summing all up :

$$x(t) = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} t^n/n! = e^t \\ \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2(n+1)!} t^{n+1}}_{?} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}}_{=e^t} \end{bmatrix}$$

$\therefore$ Summataan vielä sarja

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n(n+1)\,t^{n+1}}{2(n+1)!} = \sum_{n\geq 1} \frac{t^{n+1}}{2(n-1)!}$$

$$= \frac{t^2}{2} e^t$$

$$\therefore\ x(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ \frac{t^2}{2} e^t + e^t \end{bmatrix}$$

③ $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ a & 0 \end{pmatrix}$

a) <u>P-B:</u>

$$X_a(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\int_0^t \begin{pmatrix} 0 & s \\ a & 0 \end{pmatrix} ds}_{=: I_a^1(t)} + \underbrace{\int_0^t \begin{pmatrix} 0 & s_1 \\ a & 0 \end{pmatrix} \int_0^{s_1} \begin{pmatrix} 0 & s_2 \\ a & 0 \end{pmatrix} ds_2 \, ds_1}_{=: I_a^2(t)}$$

$$+ \dots$$

$$= \sum_{n \geq 0} I_a^n(t)$$

b) Lasketaan $\lim_{a \to 0} X_a(t) = \lim_{a \to 0} \sum_{n \geq 0} I_a^n(t)$.

Koska sarja $\sum_{n=0}^{\infty} I_a^n(t)$ <u>suppenee tasaisesti kaikilla $a \in [-1, 1]$</u> (t pidetään kiinnitettynä)

niin voimme ottaa raja-arvon summan sisälle:

$$\lim_{a \to 0} \sum_{n \geq 0} I_a^n(t) = \sum_{n \geq 0} \lim_{a \to 0} I_a^n(t).$$

... Lasketaan

$$\lim_{a\to 0} I_a^1(t) = \lim_{a\to 0} \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & s \\ a & 0 \end{pmatrix} = \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t^2/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{a\to 0} I_a^2(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & s_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\int_0^{s_1} \begin{pmatrix} 0 & s_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ds_2}_{\begin{pmatrix} 0 & s_1^2/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} ds_1 = \bar{0}$$

$$\Rightarrow \underline{\lim_{a\to 0} I_a^n(t) = \bar{0}} \quad \forall n \geq 2, \quad \forall t \geq 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{a\to 0} X_a(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t^2/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & t^2/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

c) $$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t\, x_2(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ $\dot{x}_2(t) = 0$ eli $\underline{x_2(t) \equiv x_{02}}$, josta

$$\dot{x}_1(t) = t\, x_{02} \Leftrightarrow x_1(t) = x_{01} + \frac{t^2}{2} x_{02}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t^2/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}}$$ eli sopii :)

(4) $\bar{x}_1(t) = \cos t$

$\bar{x}_2(t) = \sin t$, $t \in \mathbb{R}$.

x_1 ja x_2 ovat vektoriavaruuden $C(\mathbb{R})$ vektoreita. Jos ne olisivat lineaarisesti riippuvia, löytyisi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\underline{(c_1, c_2) \neq (0,0)}$

$c_1 \bar{x}_1 + c_2 \bar{x}_2 = \bar{0}$,

missä $\bar{0}$ on $C(\mathbb{R})$:n nollavektori, eli $\bar{0}(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Eli oletetaan, että

$c_1 \cos t + c_2 \sin t = 0 \qquad \forall t$

<u>Sijoitetaan</u> ensin $t = 0$:

$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{c_1 = 0}$

sitten $t = \pi/2$:

$c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{c_2 = 0}$,

$\therefore$ cos ja sin <u>lin. riip.</u>

5 Koska $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$,

niin näemme että funktiot

$\cos(2t)$, $\bar{1}$ ja $\sin^2(t)$

ovat lin. riippuvia.

Se oli tylsää... Yleisempi tapa:

Olk. $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in C(\mathbb{R})$ kahdesti derivoituvia.

$$\boxed{c_1 x(t) + c_2 y(t) + c_3 z(t) = 0}, \quad \forall t \geq 0, \quad \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 x(t) + c_2 y(t) + c_3 z(t) = 0 \\ c_1 x'(t) + c_2 y'(t) + c_3 z'(t) = 0 \\ c_1 x''(t) + c_2 y''(t) + c_3 z''(t) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{bmatrix}}_{W(t)} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow W(t)$ ei ole kääntyvä $\Leftrightarrow$ $\boxed{\det W(t) = 0}$.