Lösningsförslag till 5. övningarna

1. Visa att
$$u(t;\xi) = \frac{\xi e^t}{1+\xi\,(e^t-1)}$$
definierar ett dynamiskt system u i rummet $X = \mathbb{R}$. Avbildningen $t \mapsto u(t;\xi)$ tillfredsställer ett begynnelsevärdesproblem. Vilket?

Lösning. Vi märker till först att
$$u(0;\xi) = \frac{\xi e^0}{1+\xi(e^0-1)} = \xi.$$
Genom att derivera funktionen i förhållande till t får vi
$$\frac{d}{dt}u(t;\xi) = \frac{\xi e^t}{1+\xi(e^t-1)} - \frac{\xi e^2 \cdot \xi e^t}{(1+\xi(e^t-1))^2} = u(t;\xi) - u(t;\xi)^2.$$
Funktionen u definierar alltså ett autonomt dynamiskt system med begynnelsevärden
$$\begin{cases} \dot{x} = x(1-x) \\ x(0) = \xi. \end{cases}$$

2. Låt $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara strängt växande och kontinuerligt deriverbar. Visa, att
$$u(t;\xi) = H^{-1}(H(\xi)+t)$$
definierar ett autonomt dynamiskt system i $\mathbb{R}$. Avbildningen $t \mapsto u(t;\xi)$ tillfredsställer ett begynnelsevärdesproblem. Vilket?

Lösning. Enligt antaganden är H bijektiv till sin bild och derivatan av dess inversa funktion är
$$(H^{-1})'(t) = \frac{1}{H'(H^{-1}(t))}, t \in H(\mathbb{R}).$$
Således
$$\frac{d}{dt}u(t;\xi) = \frac{dH^{-1}}{dt}(H(\xi)+t) = \frac{1}{H'(H^{-1}(H(\xi)+t))} = \frac{1}{H'(u(t;\xi))}.$$

Vi ser klart att

$$u(0;\xi) = \xi,$$

alltså tillfredsställer u ett autonomt dynamiskt system med begynnelsevärden

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{H'(x)} \\ x(0) = \xi. \end{cases}$$

3. Låt $T(t)$ vara den tidsberoende matrisen

$$T(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \frac{1}{\omega}\sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix},$$

där $\omega > 0$. Avbildningen $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definieras på följande sätt:

$$u(t,\xi) = T(t)\xi, \quad t \geq 0, \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Visa, att u är ett linjärt autonomt dynamiskt system i $\mathbb{R}^2$.

Lösning. Funktionen u kan uttryckas i formen

$$u(t;\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1\cos\omega t + \frac{\xi_2}{\omega}\sin\omega t \\ \omega\xi_1\sin\omega t + \xi_2\cos\omega t \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Vi räknar

$$T'(t) = \begin{pmatrix} -\omega\sin\omega t & \cos\omega t \\ -\omega^2\cos\omega t & \omega\sin\omega t \end{pmatrix}.$$

Från detta fås

$$\frac{d}{dt}u(t;\xi) = T'(t)\xi = \begin{pmatrix} -\omega\xi_1\sin\omega t + \xi_2\cos\omega t \\ -\omega^2\xi_1\cos\omega t + \omega\xi_2\sin\omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix},$$

där vi vidare märker, att

$$\begin{aligned} -\omega\xi_1\sin\omega t + \xi_2\cos\omega t &= y(t) \\ -\omega^2\xi_1\cos\omega t + \omega\xi_2\sin\omega t &= -\omega^2 x(t). \end{aligned}$$

Vi får det autonoma lineära systemet

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega^2 x. \end{cases}$$

4. Betrakta ekvationen

$$\ddot{x} + 2x^3 - x = 0.$$

(a) Skriv ekvationen som ett system av första ordningens ekvationer för variablerna x och $v := \dot{x}$.

(b) Bestäm systemets jämviktslägen.

(c) Härled en differentialekvation för $v(x)$ och lös denna.

(d) Rita ett fasdiagram (dvs. rita lösningskurvorna i xv-planet och ange kurvans riktning med en pil).

(e) Använd fasdiagrammet till att sluta dig till att alla lösningar är begränsade, att origo är en sadelpunkt och att de övriga jämviktslägena är stabila.

Lösning.

(a) Genom att beteckna $v = \dot{x}$ motsvarar uppgiftens ekvation systemet

$$\begin{cases} \dot{v} & = x - 2x^3 \\ \dot{x} & = v. \end{cases}$$

(b) Dennas jämviktslägen fås från kraven $x - 2x^3 \equiv 0$ och $v \equiv 0$, alltså är de $(0, 0)$ samt $(1/\sqrt{2}, 0)$.

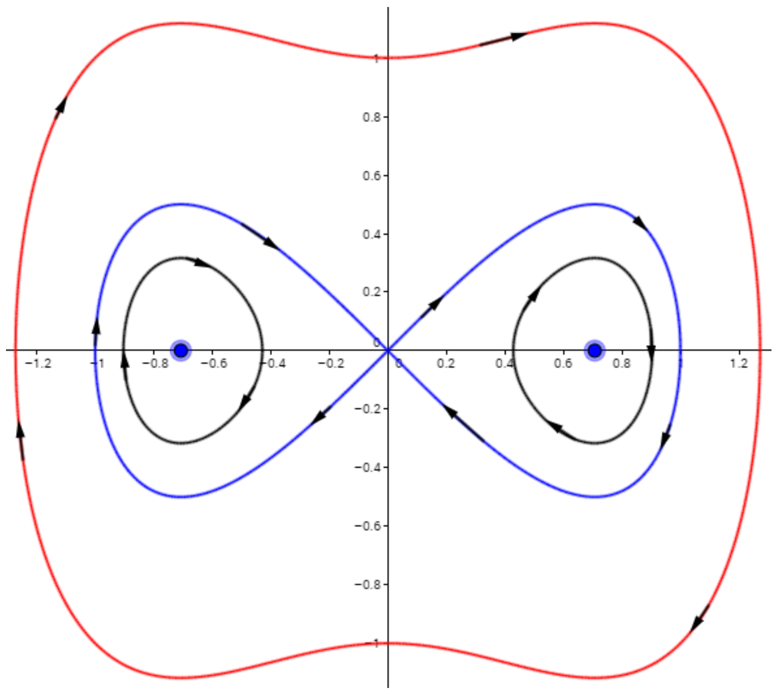
(c) Vid ställen där $\dot{x} \neq 0$ får vi för derivatan $\dfrac{dv}{dx}$ uttrycket

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\dot{v}}{\dot{x}} = \frac{x - 2x^3}{v}.$$

Ekvationen är separerbar och kan lösas till dess implicita form

$$v^2 = x^2 - x^4 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(d) I fasdiagrammet bildar banorna slutna kurvor, vars riktning är medsols. I bilden har den röda parametervärdet $C = 1$, den blåa $C = 0$och den svarta $C = -3/20$.



(e) Från fasdiagrammet ser vi att banorna $t \mapsto (x(t), v(t))$ hålls begränsade. Dessutom ser vi att jämviktslägena $\pm(1/\sqrt{2}, 0)$ är stabila (men inte attraherande), medan $(0, 0)$ är en sadelpunkt.

5. Betrakta systemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(a - bx - cy), \\ \dot{y} &= y(d - ex - fy) \end{aligned}$$

i tillståndsrummet $\mathbb{R}^2_+$ (a, b, c, d, e, f är positiva konstanter).

(a) Bestäm isoklinerna $\dot{x} = 0$ och $\dot{y} = 0$.

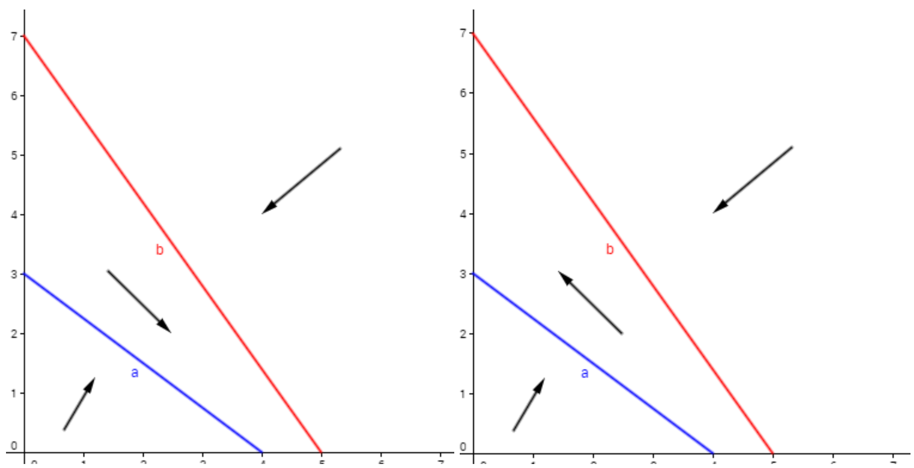
(b) Visa med hjälp av fasdiagrammet att om isoklinerna inte skär varandra i $\mathbb{R}^2_+$, så konvergerar antingen $x(t)$ eller $y(t)$ (vilkendera?) mot noll då t växer över varje gräns.

(c) Undersök med hjälp av fasdiagrammet jämviktspunkternas stabilitet för olika värden på parametrarna i det fall att isoklinerna skär varandra i en inre punkt till $\mathbb{R}^2_+$.

Lösning. I bilderna nedan motsvarar *blåa* strecket linjen $d - ex - fy = 0$ och *röda* linjen $a - bx - cy = 0$.

(a) Isoklinen $\dot{x} = 0$ är sträckan $bx + cy = a$, $x, y > 0$ och $\dot{y} = 0$ däremot sträckan $ex + fy = d$, $x, y > 0$. Båda är avtagande linjer. De kan skära varandra eller låta bli att göra det i den första kvadranten. Skärningspunkten är alltid en jämviktspunkt.

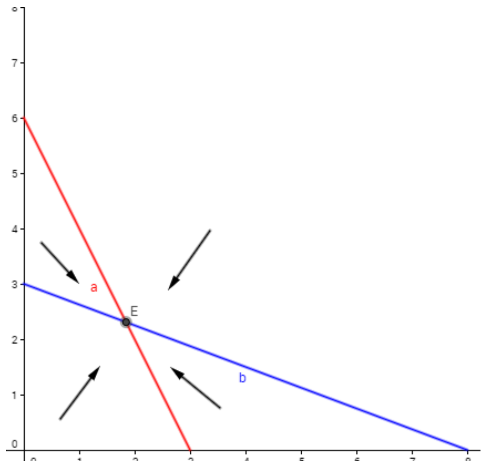
(b) Om vi antar att linjerna inte skär varandra, så delar de kvadranten i tre områden. Tidsderivatornas $\dot{x}, \dot{y}$ förtecken syns i bilderna från pilarnas riktning.

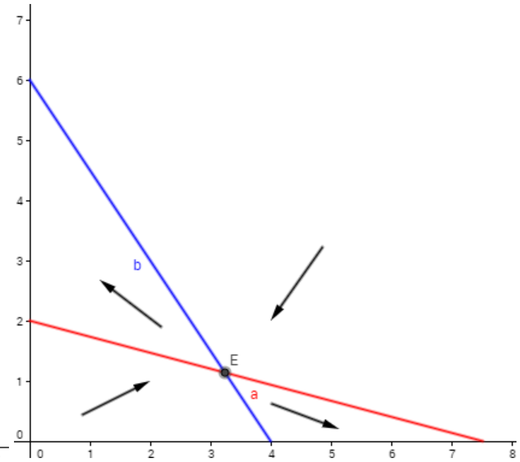


I båda bilderna rör sig första kvadrantens begynnelsevärden mot området mellan linjerna, där den andra komponenten konvergerar mot noll (i vänstra bilden y-komponenten och i den högra x-komponenten).

Lösningskurvorna konvergerar inte mot någon inre punkt av kvadranten, eftersom denna då enligt Sats 6.4 i kompendiet skulle vara en jämviktspunkt, vilket är emot antagandet att linjerna inte skär varandra.

(c) I fallet där linjerna skär varandra i första kvadranten, delas den i fyra områden, där lösningarnas utvecklingshåll är enligt pilarna. Skärningspunkten $E = (x_0, y_0)$ är systemets jämviktspunkt. Beroende på linjernas konfigurering är punkten antingen attraherande eller en sadelpunkt. Origo är alltid en repellerande jämviktspunkt.


a
E
b


b
E
a