Ratkaisuehdotuksia 5. harjoituksiin

1. Osoita, että

$$u(t;\xi) = \frac{\xi e^t}{1+\xi\,(e^t-1)}$$

määrittelee autonomisen dynaamisen systeemin u avaruudessa $X = \mathbb{R}$. Kuvaus $t \mapsto u(t;\xi)$ toteuttaa alkuarvotehtävän. Minkä?

Ratkaisu. Huomataan ensin, että

$$u(0;\xi) = \frac{\xi e^0}{1+\xi(e^0-1)} = \xi.$$

Derivoimalla funktiota t:n suhteen saadaan

$$\frac{d}{dt}u(t;\xi) = \frac{\xi e^t}{1+\xi(e^t-1)} - \frac{\xi e^2 \cdot \xi e^t}{(1+\xi(e^t-1))^2} = u(t;\xi) - u(t;\xi)^2.$$

Funktio u määrittelee siis autonomisen dynaamisen systeemin alkuarvoilla

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1-x) \\ x(0) = \xi. \end{cases}$$

2. Olkoon $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aidosti kasvava ja jatkuvasti derivoituva. Osoita, että

$$u(t;\xi) = H^{-1}(H(\xi)+t)$$

määrittelee autonomisen dynaamisen systeemin $\mathbb{R}$:ssä. Kuvaus $t \mapsto u(t;\xi)$ toteuttaa alkuarvotehtävän. Minkä?

Ratkaisu. Oletusten nojalla H on bijektiivinen kuvalleen ja sen käänteisfunktion derivaatta on

$$(H^{-1})'(t) = \frac{1}{H'(H^{-1}(t))}, t \in H(\mathbb{R}).$$

Siten

$$\frac{d}{dt}u(t;\xi) = \frac{dH^{-1}}{dt}(H(\xi)+t) = \frac{1}{H'(H^{-1}(H(\xi)+t))} = \frac{1}{H'(u(t;\xi))}.$$

Selvästi myös

$$u(0;\xi) = \xi,$$

joten u toteuttaa autonomisen dynaamisen systeemin alkuarvoilla

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{H'(x)} \\ x(0) = \xi. \end{cases}$$

3. Olkoon $T(t)$ ajasta riippuva matriisi

$$T(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \frac{1}{\omega}\sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix},$$

missä $\omega > 0$. Määritellään kuvaus $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ seuraavasti:

$$u(t,\xi) = T(t)\xi, \quad t \geq 0, \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Osoita, että u on lineaarinen autonominen dynaaminen systeemi $\mathbb{R}^2$:ssä.

Ratkaisu. Funktio u voidaan ilmaista muodossa

$$u(t;\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1\cos\omega t + \frac{\xi_2}{\omega}\sin\omega t \\ \omega\xi_1\sin\omega t + \xi_2\cos\omega t \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Lasketaan

$$T'(t) = \begin{pmatrix} -\omega\sin\omega t & \cos\omega t \\ -\omega^2\cos\omega t & \omega\sin\omega t \end{pmatrix}.$$

Tästä saadaan

$$\frac{d}{dt}u(t;\xi) = T'(t)\xi = \begin{pmatrix} -\omega\xi_1\sin\omega t + \xi_2\cos\omega t \\ -\omega^2\xi_1\cos\omega t + \omega\xi_2\sin\omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix},$$

josta edelleen huomataan, että

$$\begin{aligned} -\omega\xi_1\sin\omega t + \xi_2\cos\omega t &= y(t) \\ -\omega^2\xi_1\cos\omega t + \omega\xi_2\sin\omega t &= -\omega^2 x(t). \end{aligned}$$

Saadaan autonominen lineaarinen systeemi

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega^2 x. \end{cases}$$

4. Tarkastellaan yhtälöä

$$\ddot{x} + 2x^3 - x = 0.$$

(a) Kirjoita yhtälö ensimmäisen kertaluvun systeeminä muuttujille x ja $v := \dot{x}$.

(b) Määritä systeemin tasapainokohdat.

(c) Johda differentiaaliyhtälö $v(x)$:lle ja ratkaise se.

(d) Piirrä faasikuvio (ts. piirrä muutama ratkaisukäyrä xv-tasosssa ja osoita nuolella kunkin käyrän suunta).

(e) Päättele faasikuviosta, että kaikki ratkaisut ovat rajoitettuja, että origo on satulapiste ja että muut tasapainokohdat ovat stabiileja.

Ratkaisu.

(a) Merkitsemällä $v = \dot{x}$ tehtävän yhtälö vastaa systeemiä

$$\begin{cases} \dot{v} & = x - 2x^3 \\ \dot{x} & = v. \end{cases}$$

(b) Tämän tasapainokohdat saadaan ehdoista $x - 2x^3 \equiv 0$ ja $v \equiv 0$, eli ne ovat $(0,0)$ sekä $(1/\sqrt{2}, 0)$.

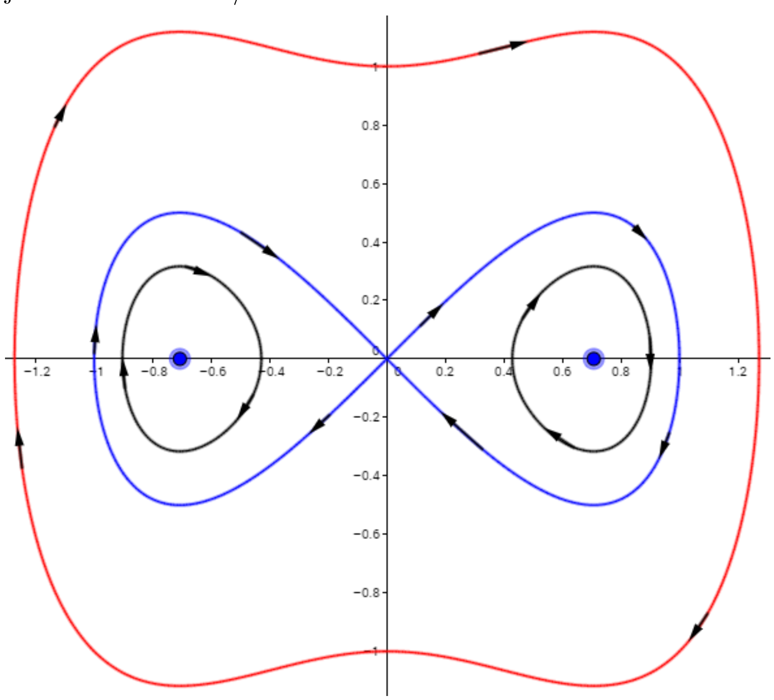
(c) kohdassa jossa $\dot{x} \neq 0$ saadaan derivaatalle $\dfrac{dv}{dx}$ lauseke

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\dot{v}}{\dot{x}} = \frac{x - 2x^3}{v}.$$

Tämä voidaan separoida ja ratkaista implisiittimuotoon

$$v^2 = x^2 - x^4 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(d) Faasikuviossa radat muodostavat suljettuja käyriä, joiden kulkusuunta on myötäpäivään. Kuvassa punaisella parametrin arvo $C = 1$, sinisellä $C = 0$ ja mustalla $C = -3/20$.



(e) Faasikuviosta nähdään, että radat $t \mapsto (x(t), v(t))$ pysyvät rajoitettuna. Lisäksi nähdään, että tasapainopisteet $\pm(1/\sqrt{2}, 0)$ ovat stabiileja (mutta eivät attraktoivia), kun taas $(0,0)$ on satulapiste.

5. Tarkastellaan systeemiä

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(a - bx - cy), \\ \dot{y} &= y(d - ex - fy) \end{aligned}$$

tila-avaruudessa $\mathbb{R}^2_+$ (a, b, c, d, e, f ovat positiivisia vakioita).

(a) Määritä isokliinit $\dot{x} = 0$ ja $\dot{y} = 0$.

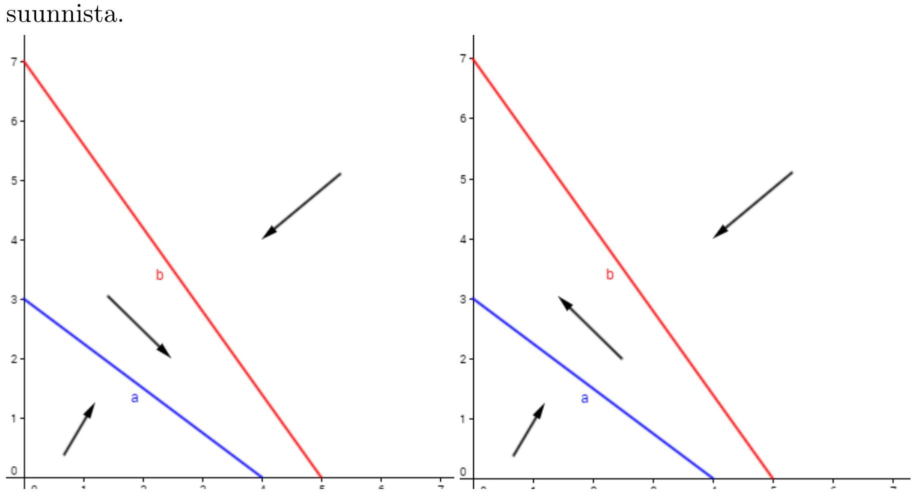
(b) Osoita faasikuvion avulla, että jos isokliinit eivät leikkaa toisiaan joukossa $\mathbb{R}^2_+$, niin joko $x(t)$ tai $y(t)$ (kumpi?) suppenee kohti nollaa kun t kasvaa rajatta.

(c) Tutki faasikuvion avulla tasapainokohtien stabiilisuutta eri parametrien arvoilla tapauksessa jossa isokliinit leikkaavat toisensa joukon $\mathbb{R}^2_+$ sisäpisteessä.

Ratkaisu. Oheisissa kuvissa *sininen* viiva vastaa suoraa $d - ex - fy = 0$ ja *punainen* suoraa $a - bx - cy = 0$.

(a) Isokliini $\dot{x} = 0$ on jana $bx + cy = a$, $x, y > 0$ ja $\dot{y} = 0$ puolestaan jana $ex + fy = d$, $x, y > 0$. Molemmat ovat laskevia suoria. Ne voivat leikata tai olla leikkaamatta ensimmäisessä kvadrantissa. Leikkauspiste on aina tasapainopiste.

(b) Jos oletetaan, että suorat eivät leikkaa, ne jakavat kvadrantin kolmeen alueeseen. Aikaderivaattojen $\dot{x}, \dot{y}$ merkit näkyvät oheisissa kuvissa nuolten suunnista.



Molemmissa kuvissa ensimmäisessä kvadrantissa olevat alkuarvot kulkevat kohti kahden suoran välistä aluetta, jossa toinen komponentti suppenee kohti nollaa (vasemmassa kuvassa y-komponentti ja oikeassa x-komponentti).

Ratkaisukäyrät eivät konvergoi kohti mitään kvadrantin sisäpistettä, sillä tämä olisi luentomonisteen Lauseen 6.4 mukaan tasapainopiste, joka on vastoin olettamusta, etteivät käyrät leikkaa.

(c) Suorien leikatessa ensimmäisessä kvadrantissa, ne jakavat sen neljään alueeseen, joissa ratkaisujen kehityssuunnat ovat nuolen mukaisia. Leikkauspiste $E = (x_0, y_0)$ on systeemin tasapainopiste. Riippuen suorien konfiguraatiosta se on joko attraktoiva tai satulapiste. Origo on aina repelloiva tasapainopiste.