Differentialekvationer I

Räkneövning 4, höstterminen 2006

1. Visa, att
$$u(t;\xi) = \frac{\xi e^t}{1+\xi\,(e^t-1)}$$
definierar ett dynamiskt system u i rummet $X = \mathbb{R}$. Avbildningen $t \mapsto u(t;\xi)$ tillfredsställer ett begynnelsevärdesproblem. Vilket?

2. Låt $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara strängt växande och kontinuerligt deriverbar. Visa, att
$$u(t;\xi) = H^{-1}(H(\xi)+t)$$
definierar ett autonomt dynamiskt system i $\mathbb{R}$. Avbildningen $t \mapsto u(t;\xi)$ tillfredsställer ett begynnelsevärdesproblem. Vilket?

3. Låt $T(t)$ vara den tidsberoende matrisen
$$T(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \frac{1}{\omega}\sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix},$$
där $\omega > 0$. Avbildningen $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definieras på följande sätt:
$$u(t,\xi) = T(t)\xi, \quad t \geq 0, \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$
Visa, att u är ett linjärt autonomt dynamiskt system i $\mathbb{R}^2$.

4. Betrakta ekvationen
$$\ddot{x} + 2x^3 - x = 0.$$
   (a) Skriv ekvationen som ett system av första ordningens ekvationer för variablerna x och $v := \dot{x}$.

   (b) Bestäm systemets jämviktslägen.

   (c) Härled en differentialekvation för $v(x)$ och lös denna.

   (d) Rita ett fasdiagram (dvs. rita lösningskurvorna i xv-planet och ange varje kurvas riktning med en pil).

   (e) Använd fasdiagrammet till att sluta dig till att alla lösningar är begränsade, att origo är en sadelpunkt och att de övriga jämviktslägena är stabila.

5. Betrakta systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(a - bx - cy),\\ \dot{y} &= y(d - ex - fy)\end{aligned}$$

i tillståndsrummet $\mathbb{R}^2_+$ (a, b, c, d, e, f är positiva konstanter).

(a) Bestäm isoklinerna $\dot{x} = 0$ och $\dot{y} = 0$.

(b) Visa med hjälp av fasdiagrammet att om isoklinerna inte skär varandra i $\mathbb{R}^2_+$, så konvergerar antingen $x(t)$ eller $y(t)$ (vilkendera?) mot noll då t växer över varje gräns.

(c) Undersök med hjälp av fasdiagrammet jämviktspunkternas stabilitet för olika värden på parametrarna i det fall att isoklinerna skär varandra i en inre punkt till $\mathbb{R}^2_+$.