Differentiaaliyhtälöt I

5. harjoitus, kevät 2016

1. Osoita, että
$$u(t;\xi) = \frac{\xi e^t}{1 + \xi\,(e^t - 1)}$$
määrittelee autonomisen dynaamisen systeemin u avaruudessa $X = \mathbb{R}$. Kuvaus $t \mapsto u(t;\xi)$ toteuttaa alkuarvotehtävän. Minkä?

2. Olkoon $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aidosti kasvava ja jatkuvasti derivoituva. Osoita, että
$$u(t;\xi) = H^{-1}(H(\xi) + t)$$
määrittelee autonomisen dynaamisen systeemin $\mathbb{R}$:ssä. Kuvaus $t \mapsto u(t;\xi)$ toteuttaa alkuarvotehtävän. Minkä?

3. Olkoon $T(t)$ ajasta riippuva matriisi
$$T(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \frac{1}{\omega}\sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix},$$
missä $\omega > 0$. Määritellään kuvaus $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ seuraavasti:
$$u(t,\xi) = T(t)\xi, \quad t \geq 0, \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$
Osoita, että u on lineaarinen autonominen dynaaminen systeemi $\mathbb{R}^2$:ssä.

4. Tarkastellaan yhtälöä
$$\ddot{x} + 2x^3 - x = 0.$$
   (a) Kirjoita yhtälö ensimmäisen kertaluvun systeeminä muuttujille x ja $v := \dot{x}$.
   (b) Määritä systeemin tasapainokohdat.
   (c) Johda differentiaaliyhtälö $v(x)$:lle ja ratkaise se.
   (d) Piirrä faasikuvio (ts. piirrä muutama ratkaisukäyrä xv-tasosssa ja osoita nuolella kunkin käyrän suunta).
   (e) Päättele faasikuviosta, että kaikki ratkaisut ovat rajoitettuja, että origo on satulapiste ja että muut tasapainokohdat ovat stabiileja.

5. Tarkastellaan systeemiä

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(a - bx - cy), \\ \dot{y} &= y(d - ex - fy)\end{aligned}$$

tila-avaruudessa $\mathbb{R}^2_+$ (a, b, c, d, e, f ovat positiivisia vakioita).

(a) Määritä isokliinit $\dot{x} = 0$ ja $\dot{y} = 0$.

(b) Osoita faasikuvion avulla, että jos isokliinit eivät leikkaa toisiaan joukossa $\mathbb{R}^2_+$, niin joko $x(t)$ tai $y(t)$ (kumpi?) suppenee kohti nollaa kun t kasvaa rajatta.

(c) Tutki faasikuvion avulla tasapainokohtien stabiilisuutta eri parametrien arvoilla tapauksessa jossa isokliinit leikkaavat toisensa joukon $\mathbb{R}^2_+$ sisäpisteessä.