

Differentiaallikvationer I

Övning 4, vårterminen 2016

1. Vi antar att jorden är ett homogent klot med radien 6400 km och att det absoluta beloppet av dragningskraftens acceleration är 10 m/s^2 vid jordytan. Inuti jordklotet är accelerationen riktad mot medelpunkten och dess absoluta belopp är direkt proportionellt mot avståndet till medelpunkten. Vi antar vidare att man byggt en rätlinjig järnvägstunnel från en punkt på jordytan till en annan. Visa, att den tid det tar för ett tåg utan lokomotiv att rulla genom tunneln är oberoende av tunnelns längd. Bestäm denna tid. Vi bortser från luftmotstånd, friktion och andra motståndskrafter.
2. På en partikel med massan m verkar en centralkraft $\mathbf{F} = -(K/r^2)\mathbf{u}_r$. Vid tidpunkten $t = 0$ befinner sig partikeln i punkten $(r, \theta) = (1, 0)$ och har då hastigheten $v_0\mathbf{u}_\theta$. För vilka värden på v_0 är partikelns bana en
 - (a) ellips?
 - (b) cirkel?
 - (c) parabel?
 - (d) hyperbel?
3. Lös initialvärdesproblemet

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = e^t \cos t, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

med metoden för variation av konstanter.

4. Låt α och g vara positiva konstanter. Lös initialvärdesproblemet

$$\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + g = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0$$

och bestäm det värde $t = T$ för vilket $\dot{x}(T) = 0$. Ekvationen beskriver höjden x som en funktion av tiden t av en kropp som vid tidpunkten $t = 0$ kastas lodrätt upp i luften med initialhastigheten v_0 . Tiden T är den tid det tar för kroppen att nå topphöjden. Jordens dragningskraft är mg och luftmotståndet mg .

5. Bestäm de reella värden på a för vilka ekvationerna

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2a\dot{x} - 4x &= 0, \\ \ddot{x} - 2\dot{x} + ax &= 0\end{aligned}$$

har en gemensam icke-trivial lösning. Lös ekvationerna för dessa värden på a .