

Differentiaaliyhtälöt I

4. harjoitus, kevät 2016

1. Oletetaan maapallo homogeeniseksi palloksi jonka säde on 6400 km ja vetovoiman kiihtyvyyden itseisarvo pinnalla 10 m/s^2 . Maapallon sisällä vetovoiman kiihtyvyys osoittaa kohti keskipistettä ja sen itseisarvo on suoraan verrannollinen etäisyyteen keskipisteestä. Osoita, että jos maapallon pinnan pisteestä toiseen on rakennettu suora rautatietunneli, niin se aika, jonka veturitön juna tarvitsee tämän kulkemiseen, kun lähtönopeus on 0 ja kun ilman ym. vastusta ei oteta huomioon, on riippumaton tunnelin pituudesta. Määritä tämä aika.

2. Hiukkaseen, jonka massa on m , vaikuttaa keskeisvoima $\mathbf{F} = -(K/r^2)\mathbf{u}_r$. Hetkellä $t = 0$ hiukkanen on pisteessä $(r, \theta) = (1, 0)$ ja sen nopeus on $v_0\mathbf{u}_\theta$. Millä v_0 :n arvoilla hiukkasen liikerata on

- (a) ellipsi?
- (b) ympyrä?
- (c) paraabeli?
- (d) hyperbeli?

3. Ratkaise vakioden varioimiskeinoa käyttäen alkuarvotehtävä

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = e^t \cos t, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$

4. Olkoot α ja g positiivisia vakioita. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + g = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0$$

ja määritä se arvo $t = T$, jolle $\dot{x}(T) = 0$. Kyseessä on hetkellä $t = 0$ alkunopeudella v_0 pystysuoraan ylöspäin heitetyn m -massaisen kappaleen nousukorkeus x ajan t funktiona sekä lentoaika T lakikorkeuteen, kun kappaleeseen vaikuttaa maan vetovoima mg sekä nopeuteen suoraan verrannollinen ilmanvastusvoima $m\alpha g$.

5. Määritä ne reaaliset a :n arvot, joilla yhtälöillä

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2a\dot{x} - 4x &= 0, \\ \ddot{x} - 2\dot{x} + ax &= 0 \end{aligned}$$

on yhteinen ei-triviaali ratkaisu. Ratkaise yhtälöt saaduilla a :n arvoilla.