

## Differentiaaliyhtälöt I

3. harjoitus, kevät 2016

1. Etsi seuraavien differentiaaliyhtälöiden yleiset ratkaisut.

(a)  $\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0,$

(b)  $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0,$

(c)  $\ddot{x} + 2\dot{x} + 10x = 0.$

2. Ratkaise seuraavat alkuarvotehtävät.

(a)  $\ddot{x} + \dot{x} + x = t, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0,$

(b)  $\ddot{x} + 4x = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1,$

(c)  $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = e^{-t}, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 1.$

3. Yhtälön

$$y' + P(x)y = (x + 1)^2 e^x$$

eräs ratkaisu on

$$y = (x^2 - 1) e^x.$$

Määritä yleinen ratkaisu.

4. Osoita seuraavat differentiaaliyhtälöt eksakteiksi ja määritä yleiset ratkaisut.

(a)  $2xy + 3 + (x^2 - 1)y' = 0,$

(b)  $e^{-y} + (1 - xe^{-y})y' = 0.$

5. Osoita, että jos

$$\frac{1}{M(x, y)} \left( \frac{\partial}{\partial y} M(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} N(x, y) \right)$$

on pelkästään  $y$ :n funktio, niin yhtälöllä

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0$$

on muotoa  $\mu(y)$  oleva integroiva tekijä.

6. Ratkaise edellisen tehtävän tuloksen nojalla yhtälö

$$y + (2y^3 - x)y' = 0.$$