

Differentialekvationer I

Räkneövning 2, vårterminen 2016

1. Bestäm den allmänna lösningen till följande ekvationer (här är $' = \frac{d}{dx}$):

(a) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$,

(b) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$,

(c) $y' \sin x - y = 1 - \cos x$.

2. Lös följande begynnelsevärdesproblem.

(a) $xy' + 2y = x^3$; $y(1) = 1$,

(b) $y' + y \cos x = \sin x \cos x$; $y(0) = 1$.

3. Bestäm ekvationens

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}$$

allmänna lösning.

4. Lös Bernoullis ekvation

$$y' + 2xy + xy^4 = 0.$$

5. En population växer enligt den logistiska modellen

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

med parametern $r = 0.5$. Begynnelsepopulationens storlek är en hundraedel av bärcapaciteten K . Vid vilken tidpunkt är populationens storlek (a) 50%, (b) 90%, (c) 99% av bärcapaciteten?

6. Antag att påssjuka, röda hund och mässling sprider sig enligt SIR-modellen. Man har empiriskt visat att R_0 för dessa sjukdomar är 18 (påssjuka), 7 (röda hund), ja 17 (mässling). Hur stor del av en population, där ingen har immunitetsskydd, insjuknar i dessa sjukdomar om en epidemi bryter ut?