

Differentiaaliyhtälöt I

2. harjoitus, kevät 2016

1. Etsi seuraavien yhtälöiden yleiset ratkaisut (Tässä $' = \frac{d}{dx}$):

(a) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$,

(b) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$,

(c) $y' \sin x - y = 1 - \cos x$.

2. Ratkaise seuraavat alkuarvotehtävät.

(a) $xy' + 2y = x^3$; $y(1) = 1$,

(b) $y' + y \cos x = \sin x \cos x$; $y(0) = 1$.

3. Etsi yhtälön

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}$$

yleinen ratkaisu.

4. Ratkaise Bernoullin yhtälö

$$y' + 2xy + xy^4 = 0.$$

5. Populaatio kasvaa logistisen mallin

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

mukaisesti parametrilla $r = 0.5$. Alkupopulaation koko on sadasosa kantokyvystä K . Milloin populaation koko on (a) 50%, (b) 90%, (c) 99% kantokyvystä?

6. Oletetaan, että sikotauti, vihurirokko ja tuhkarokko leviävät SIR-mallin mukaisesti. Empiirisesti on todettu että näille taudeille R_0 :n arvo on 18 (sikotauti), 7 (vihurirokko), ja 17 (tuhkarokko). Kuinka suuri osuus populaatiosta, jossa kenelläkään ei ole immuniteettisuoja, saa kyseisen taudin jos epidemia puhkeaa?