Lösningsförslag till 4. övningarna

1.

Vi antar att jorden är ett homogent klot med radien 6400 km och att det absoluta beloppet av dragningskraftens acceleration är $10m/s^2$ vid jordytan. Inuti jordklotet är accelerationen riktad mot medelpunkten och dess absoluta belopp är direkt proportionellt mot avståndet till medelpunkten. Vi antar vidare att man byggt en rätlinjig järnvägstunnel från en punkt på jordytan till en annan. Visa, att den tid det tar för ett tåg utan lokomotiv att rulla genom tunneln är oberoende av tunnelns längd. Bestäm denna tid. Vi bortser från luftmotstånd, friktion och andra motståndskrafter.

Lösning.

Vi modellerar situationen i det kartesiska koordinatsystemet för ett plan. Två dimensioner räcker, eftersom tunnelns ändpunkter alltid är på någon stor cirkel av jorden och vi kan undersöka tvärsnittet just vid denna stora cirkel. Vi placerar jordens mittpunkt vid origo, vilket leder till att jordens tvärsnitt bildar en cirkel runt origo med radien 6400km. Vi kan anta att tunneln är en korda parallell med x-axeln, med ändpunkterna (x_0, y_0) och $(-x_0, y_0)$. Vi behöver inte egentligen y-koordinaterna i lösningen.

Låt $x(t)$ vara tågets läge i x-ledet vid tidpunkten t. Vi antar att tåget ligger vid (x_0, y_0) då $t = 0$. Tyngdkraften $\bar{G}$ som verkar på tåget är en vektorvars riktning är mot origo och dess storlek $G = mKr$, där m är tågets massa, K någon konstant (lvi räknar ut denna konstant senare) och r är tågets avstånd till origo. Vektorn $\bar{G}$ och dess vågräta komponent $\bar{G_x}$, samt den lodräta komponenten $\bar{G_y}$ bildar en rätvinklig triangel. Denna triangel är likformig med den triangel som bildas av ortsvektorn till tågets läge (egentligen dess motvektor), dess lodräta komponent, samt den vågräta komponenten $(-x(t), 0)$. Eftersom det för längden G av $\bar{G}$ gäller att $G = mKr$ och eftersom trianglarna är likformiga, så gäller det för den vågräta komponenten $\bar{G_x}$ av $\bar{G}$ att $G_x = -mKx(t)$.! Genom att tillämpa Newtons andra lag $\bar{F} = m\bar{a}$ får vi tåget på en vågrät linje, alltså gäller för accelerationen i tunnelns riktning ekvationen

$$\ddot{x}(t) = \frac{G_x}{m} = -Kx(t) \iff \ddot{x}(t) + Kx(t) = 0$$

Accelerationens storlek är negativ, eftersom riktningen av rörelsen är från höger till vänster i koordinatsystemet. Ekvationen är en lineär differentialekvation av andra ordningen, vars karakteristiska ekvation är $r^2 + K = 0$. Rötterna för denna är $\sqrt{k}i$ och $-\sqrt{k}i$. Således är fundamentalsystemet $\left(\sin\left(\sqrt{k}t\right), \cos\left(\sqrt{k}t\right)\right)$ för differentialekvationen. Alltså är differentialekvationens allmänna lösning

$$x(t) = c_1 \sin\left(\sqrt{k}t\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{k}t\right),$$

där c_1 och c_2 är reella konstanter.

Initiala värden är $\dot{x}(0) = 0$, eftersom tåget börjar rulla från att ha stått stilla, samt $x(0) = x_0$. Genom att sätta dessa in i den allmäna lösningen får vi $x(0) = c_2 = x_0$ och $\dot{x}(0) = \sqrt{k}c_1 \cos(0) = 0 \iff c_1 = 0$. Initialvärdesproblemets lösning är således

$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{k}t\right).$$

Vi vill lösa ut den tidpunkten t_0 då tåget når tunnelns andra ände vid punkten $(-x_0, y_0)$, alltså då $x(t_0) = -x_0$:

$$x(t_0) = -x_0 \iff -x_0 = x_0 \cos\left(\sqrt{k}t_0\right) \iff -1 = \cos\left(\sqrt{k}t_0\right)$$
$$\iff \sqrt{k}t_0 = \pi \iff t_0 = \frac{\pi}{\sqrt{k}}.$$

Tiden det tar för tåget att röra sig igenom tunneln är alltså konstant. Vi räknar ut denna tid. Vi känner till koefficienten K, eftersom det antagits i uppgiften att dragninskraftens acceleration på jordytan är $10 = 6400000K$, ur vilket fås $\sqrt{K} = \frac{1}{800}$.

Alltså är $t_0 = 800\pi \approx 2513s \approx 42$ min.

2.

På en partikel med massan m verkar en centralkraft $F = (-K/r^2)u_r$. Vid tidpunkten $t = 0$ befinner sig partikeln i punkten $(r, \theta) = (1, 0)$ och har då hastigheten $v_0 u_\theta$. För vilka värden på v_0 är partikelns bana en

(a) ellips?

(b) cirkel?

(c) parabel?

(d) hyperbel?

Lösning.

Partikelns bana är av formen

$$r(\vartheta) = \frac{ep}{1 + e\cos(\vartheta - \delta)},$$

där $e = c * c_1^2/K/m$, $p = \frac{1}{c}$ och parametrarna c, c_1, samt ϑ uppfyller relationerna

$$\begin{cases} c_1 = r_0^2 \dot{\vartheta}_0 \\ \frac{K}{m} c_1^{-2} + c\cos(\vartheta_0 - \delta) = \frac{1}{r_0} \\ c * \sin(\vartheta_0 - \delta) = \frac{\dot{r_0}}{r_0^2 \dot{\vartheta_0}}. \end{cases}$$

Från initiala kraven $(r_0, \vartheta_0) = (1, 0)$ och $\bar{v_0} = \dot{r_0} r_0 u_r + \dot{\vartheta}_0 u_\vartheta = v_0 u_\vartheta$ får vi att

$$\begin{cases} r_0 = 1 \\ v_0 = 1 \\ \dot{r_0} = 1 \\ \dot{\vartheta}_0 = 1, \end{cases}$$

alltså är det ovanstående ekvationssystemet

$$\begin{cases} c_1 = v_0 \\ \frac{K}{m} v_0^{-2} + c\cos\delta = 1 \\ c\sin\delta = 0. \end{cases}$$

Från detta får vi löst $c = 1 - \frac{K/m}{v_0^2}$.

Formen av partikelns bana bestäms av parametern

$$e = \left(1 - \frac{K/m}{v_0^2}\right)\frac{v_0^2}{K/m} = \frac{v_0^2}{K/m} - 1$$

så att banan är en

(a) ellips, då $e < 1$, (b) cirkel, då $e = 0$, (c) parabel, då $e = 1$ och (d) hyperbel, då $e > 1$.

3.

Lös initialvärdesproblemet

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = e^t \cos t, x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

med metoden för variation av konstanter.

Lösning.

Den motsvarande homogena ekvationen är $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0$, och dess karakteristiska ekvation $r^2 + 3r + 2 = 0$, som har två olika reella rötter $r = -2$ och $r = -1$. Då är den homogena ekvationens fundamentalsystem enligt sats 3.11 paret (e^{-2t}, e^{-t}).

Vi söker upp den allmänna lösningen med ansatsen $x(t) = c_1(t)e^{-2t} + c_2(t)e^{-t}$. Då gäller att $\dot{x}(t) = \dot{c}_1(t)e^{-2t} + \dot{c}_2(t)e^{-t} - 2c_1(t)e^{-2t} - c_2e^{-t}$.

För c_1 och c_2 ställer vi kravet

$$\dot{c}_1(t)e^{-2t} + \dot{c}_2(t)e^{-t} = 0.$$

Detta ger att $\dot{x}(t) = -2c_1(t)e^{-2t} - c_2e^{-t}$ och $\ddot{x}(t) = -2\dot{c}_1(t)e^{-2t} - \dot{c}_2(t)e^{-t} + 4c_1e^{-2t} + c_2e^{-t}$.

Genom att substituera in ansatsen i den ursprungliga ekvationen får vi att

$$L(x) = -2\dot{c}_1(t)e^{-2t} - \dot{c}_2(t)e^{-t} + c_1(4e^{-2t} - 6e^{-2t} + 2e^{-2t}) + c_2(e^{-t} - 3e^{-t} + 2e^{-t}) = -2\dot{c}_1(t)e^{-2t} - \dot{c}_2(t)e^{-t}.$$

Tillsammans med ekvationen $L(x) = e^t \cos t$ får vi det överensstämmande ekvationsparet

$$\begin{cases} \dot{c}_1(t)e^{-2t} + \dot{c}_2(t)e^{-t} = 0 \\ -2\dot{c}_1(t)e^{-2t} - \dot{c}_2(t)e^{-t} = e^t \cos t. \end{cases}$$

Vi löser detta lineära ekvationspar med avseende på variablerna $\dot{c}_1$ och $\dot{c}_2$. Lösningen existerar, eftersom parets determinant är

$$\begin{vmatrix} e^{-2t} & e^{-t} \\ -2e^{-2t} & -e^{-t} \end{vmatrix} = (-e^{-t})e^{-2t} - e^{-t}(-2e^{-2t}) = e^{-3t}.$$

Detta är exakt Wronskis determinant $W(e^{-2t}, e^{-t})(t)$ för den homogena ekvationens fundamentalsystem. Således är ekvationparets lösning

$$\dot{c}_1(t) = -\frac{e^t \cos t e^{-t}}{e^{-3t}} = -\cos t e^{3t}$$

$$\dot{c}_2(t) = \frac{e^t \cos t e^{-2t}}{e^{-3t}} = \cos t e^{2t}.$$

Vi räknar till nästa integralerna. Först funktionen $c_1(t)$. Genom partiell integrering:

$$-c_1(t) = \int \cos t e^{3t} dt = \sin t e^{3t} - \int 3 \sin t e^{3t} dt.$$

Partiell integrering en till gång:

$$\sin t e^{3t} - 3\int \sin t e^{3t} dt = \sin t e^{3t} - 3(-\cos t e^{3t} + \int 3\cos t e^{3t} dt) = \sin t e^{3t} + 3\cos t e^{3t} - 9\int \cos t e^{3t} dt.$$

Vi får ekvationen

$$\int \cos t e^{3t} dt = \sin t e^{3t} + 3\cos t e^{3t} - 9\int \cos t e^{3t} dt \sim \int \cos t e^{3t} dt = \frac{1}{10} e^{3t}(\sin t + 3\cos t).$$

Alltså är $c_1(t) = -\frac{1}{10}e^{3t}(\sin t + 3\cos t)$.
På motsvarande vis tar vi reda på funktionen $c_2(t)$:

$$c_2(t) = \int \cos t e^{2t} dt = \sin t e^{2t} - \int 2 \sin t e^{2t} dt$$

och så integrerar vi partiellt en till gång:

$$\sin t e^{2t} - 2\int \sin t e^{2t} dt = \sin t e^{2t} - 2(-\cos t e^{2t} + \int 2\cos t e^{2t} dt) = \sin t e^{2t} + 2\cos t e^{2t} - 4\int \cos t e^{2t} dt,$$

vilket ger oss ekvationen

$$\int \cos t e^{2t} dt = \sin t e^{2t} + 2\cos t e^{3t} - 4\int \cos t e^{3t} dt \sim \int \cos t e^{3t} dt = \frac{1}{5} e^{2t}(\sin t + 2\cos t).$$

Alltså är $c_2(t) = \frac{1}{5} e^{2t}(\sin t + 2\cos t)$.
Vi har hittat en partikulär lösning

$$\begin{aligned} x_p(t) = c_1(t)e^{-2t} + c_1(t)e^{-t} &= (-\frac{1}{10} e^{3t}(\sin t + 3\cos t))e^{-2t} + (\frac{1}{5} e^{2t}(\sin t + 2\cos t))e^{-t} \\ &= \frac{1}{10} e^{t}(\sin t + \cos t) \end{aligned}$$

för den icke-homogena differentialekvationen och således gäller enligt superpositionsprincipen att den allmäna lösningen är

$$x(t) = x_p(t) + C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t} = \frac{1}{10} e^{t}(\sin t + \cos t) + C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t},$$

där $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ är konstanter.
Vi räknar till sist ut dessa konstanter med hjälp av initiala värden som givits.

$$x(0) = \frac{1}{10} e^{0}(\sin(0) + \cos(0) + C_1 e^{-2*0} + C_2 e^{0} = \frac{1}{10} + C_1 + C_2 = 0$$

och eftersom $\dot{x}(t) = \frac{1}{10} e^{t}(\sin tt + \cos t) + \frac{1}{10} e^{t}(\cos t - \sin t) - 2C_1 e^{-2t} - C_2 e^{-t}$,

$$\dot{x}(0) = \frac{1}{10} + 1 - 2C_1 - C_2 = 0.$$

Vi får ekvationsparet

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -\frac{1}{10} \\ 2C_1 + C_2 = \frac{11}{10}. \end{cases}$$

Genom att multiplicera den andra ekvationen med -1 och genom att räkna ut ledvis, så får vi löst att $C_1 = \frac{12}{10}$, och således $C_2 = -\frac{13}{10}$.
Initialvärdesproblemets lösning är alltså

$$x(t) = \frac{1}{10} e^{t}(\sin t + \cos t) + \frac{6}{5} e^{-2t} - \frac{13}{10} e^{-t}.$$

4.
Låt α och g vara positiva konstanter. Lös initialvärdesproblemet

$$\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + g = 0, x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0$$

och bestäm det värde $t = T$ för vilket $\dot{x}(T) = 0$. Ekvationen beskriver höjden x som en funktion av tiden t av en kropp som vid tidpunkten $t = 0$ kastas lodrätt

upp i luften med initialhastigheten $v0$. Tiden T är den tid det tar för kroppen att nå topphöjden. Jordens dragningskraft är mg och luftmotståndet $m\alpha g$.
Lösning.

Ekvationens motsvarande homogena ekvation är

$$\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) = 0.$$

Den karakteristiska ekvationen är således $r^2 + \alpha r = 0$, som har två olika reella rötter $r = 0$ och $r = -\alpha$. Enligt sats 3.11 har den homogena ekvationen fundamentalsystemet $(1, e^{-\alpha t})$. Eftersom den fullständiga ekvationen är av formen $L(x) = g$, så provar vi som ansats ett polynom av första graden $At+B$. En konstantfunktion fungerar inte som ansats, eftersom den innehålls av den homogena ekvationens allmäna lösning. Vi substituerar in ansatsen i den fullständiga ekvationen:

$$\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + g = 0 + \alpha A + g = 0 \iff A = -\frac{g}{\alpha}.$$

Vi har hittat en partikulär lösning $x_p(t) = -\frac{g}{\alpha}t$ för den fullständiga ekvationen och därmed också den allmänna lösningen

$$x(t) = x_p(t) + C_1 * 1 + C_2e^{-\alpha t} = -\frac{g}{\alpha}t + C_1 + C_2e^{-\alpha t},$$

där C_1 och C_2 är godtyckliga reella konstanter.

Vi räknar ut konstanterna genom initialvärden som givits: $x(0) = -\frac{g}{\alpha}t * 0 + C_1 + C_2e^0 = C_1 + C_2$. Eftersom $\dot{x}(t) = -\frac{g}{\alpha} + C_2\alpha e^{-\alpha t}$, så får vi $\dot{x}(0) = -\frac{g}{\alpha} - C_2\alpha = v_0$. Alltså är $C_2 = -\frac{g}{\alpha^2} - \frac{v_0}{\alpha}$ och $C_1 = -C_2 = +\frac{g}{\alpha^2} + \frac{v_0}{\alpha}$.

Från detta fås lösningen för initialvärdesproblemet:

$$x(t) = -\frac{g}{\alpha} + (\frac{g}{\alpha^2} + \frac{v_0}{\alpha})(1 - e^{\alpha t}).$$

Vi räknar dessutom ut nollstället för lösningens derivata:

$$-\frac{g}{\alpha} + (\frac{g}{\alpha} + v_0)e^{-\alpha t} = 0 \iff e^{-\alpha t} = \frac{1}{1 + \frac{v_0\alpha}{g}} \iff t = \frac{\log|1 + \frac{v_0\alpha}{g}|}{\alpha}.$$

5.

Bestäm de reella värden på a för vilka ekvationerna

$$\ddot{x} + 2a\dot{x} - 4x = 0,$$

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + ax = 0,$$

har en gemensam icke-trivial lösning. Lös ekvationerna för dessa värden på a.
Lösning.

Vi antar att den två gånger deriverbar funktion $x(t)$ uppfyller båda ekvationerna. Då gäller att x uppfyller ekvationen $(2a + 2)\dot{x} - (a + 4)x = 0$, som har fåtts från det ursprungliga ekvationssystemet genom att subtrahera ledvis. Denna ekvation är separerbar och kan därmed lösas enligt följande:

$$(2a+2)\dot{x}-(a+4)x=0 \iff \frac{\dot{x}}{x}=\frac{a+4}{2a+2} \iff \int \frac{1}{x}dx=\int \frac{a+4}{2a+2}dt$$
$$\iff \log|x|=\frac{a+4}{2a+2}t+\log|C| \iff x(t)=C\exp\left(\frac{a+4}{2a+2}\right)$$

Efter detta tar vi reda på värden för a då funktionen x uppfyller de ursprungliga ekvationerna. Vi substituerar in $x(t)=\exp(\frac{a+4}{2a+2}t)$ i ekvationen $\ddot{x}+2a\dot{x}-4x=0$. Vi behöver inte bry oss om parametern C, eftersom den skulle bli en gemensam faktor för hela ekvationen, och kan således divideras bort. Vi får

$$\left(\frac{a+4}{2a+2}\right)^2\exp\left(\frac{a+4}{2a+2}\right)+2a\left(\frac{a+4}{2a+2}\right)\exp\left(\frac{a+4}{2a+2}\right)-4\exp\left(\frac{a+4}{2a+2}\right)=0$$
$$\iff \left(\frac{a+4}{2a+2}\right)^2+2a\left(\frac{a+4}{2a+2}\right)-4=0 \iff \left(\frac{a+4}{2a+2}\right)^2=\left(\frac{8a+8}{2a+2}\right)-\left(\frac{2a^2+8a}{2a+2}\right)$$
$$\iff \frac{(a+4)^2}{2a+2}=8-2a^2 \iff a^2+8a+16=16a-4a^3+16-4a^2$$
$$\iff 4a^3+5a^2-8a=0$$

Genom att substituera in $x(t)$ i ekvationen $\ddot{x}-2\dot{x}+ax=0$ får vi exakt samma polynom av tredje graden. Denna ekvation har klart roten $a=0$; de andra rötterna fås genom att lösa polynomet $4a^2+5a-8=0$, och de är $a=\frac{-5-3\sqrt{17}}{8}$ samt $a=\frac{-5+3\sqrt{17}}{8}$.

Genom att substituera dessa värden för a in i ekvationen $x(t)=\exp(\frac{a+4}{2a+2}t)$ får vi tre olika kandidater för differentialekvationssystemets lösningar.

Fallet $a=0$: $x(t)=\exp(\frac{0+4}{2*0+2}t)=e^{2t}$. Eftersom

$$\begin{cases}\ddot{x}+2a\dot{x}-4x=4e^{2t}+2*0-4e^{2t}=0\\ \ddot{x}-2\dot{x}+ax=4e^{2t}-2*2e^{2t}+0=0\end{cases}$$

så är funktionen $x(t)=e^{2t}$ en lösning för båda differentialekvationerna.

Fallet $a=\frac{-5-3\sqrt{17}}{8}$:

Genom att substituera nämnda a i ekvationen $x(t)=\exp(\frac{a+4}{2a+2}t)$ får vi

$$x(t)=\exp\left(\left(\frac{-5-3\sqrt{17}+32}{-10-6\sqrt{17}+16}\right)t\right)=\exp\left(\left(\frac{27-3\sqrt{17}}{6-6\sqrt{17}}\right)t\right)$$
$$=\exp\left(\left(\left(\frac{1}{2}\right)\frac{9-\sqrt{17}}{1-\sqrt{17}}\right)t\right)=\exp\left(\left(\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\left(1+\sqrt{17}\right)\left(9-\sqrt{17}\right)}{1-17}\right)t\right)$$
$$=\exp\left(\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{17}\right)t\right).$$

Detta ger att

$$\ddot{x} \ + \ 2a\dot{x} \ - \ 4x \ = \ \left(\frac{18-2\sqrt{17}}{16}\right)x \ + \ \left(\frac{46+2\sqrt{17}}{16}\right)x \ - \ 4x \ = \ 0$$

och

$$\begin{aligned}\ddot{x}-2\dot{x}+ax &= \left(\frac{18-2\sqrt{17}}{16}\right)x-\left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)x+\left(\frac{-5-3\sqrt{17}}{8}\right)x \\ &= \left(\frac{18-2\sqrt{17}}{16}\right)x-\left(\frac{8-8\sqrt{17}}{16}\right)x+\left(\frac{-10-6\sqrt{17}}{16}\right)x=0,\end{aligned}$$

alltså är funktionen $x(t)=\exp\left(\frac{1}{4}(1-\sqrt{17})t\right)$ en lösning för båda differentialekvationerna.

Fallet $a=\frac{-5+3\sqrt{17}}{8}$:

Genom att substituera nämnda a i ekvationen $x(t)=\exp(\frac{a+4}{2a+2}t)$ får vi

$$\begin{aligned}x(t)=\exp\left(\frac{9+17}{2+2\sqrt{17}}t\right) &= \exp\left(\frac{(9+\sqrt{17})(-1+\sqrt{17}}{32}t\right) \\ =\exp\left(\frac{1}{4}(1+\sqrt{17})\right)t.\end{aligned}$$

Detta ger att

$$\ddot{x} \ + \ 2a\dot{x} \ - \ 4x \ = \ \left(\frac{18+2\sqrt{17}}{16}\right)x \ + \ \left(\frac{46-2\sqrt{17}}{16}\right)x \ - \ 4x \ = \ 0$$

och

$$\begin{aligned}\ddot{x}-2\dot{x}+ax &= \left(\frac{18+2\sqrt{17}}{16}\right)x-\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)x+\left(\frac{-5+3\sqrt{17}}{8}\right)x \\ &= \left(\frac{18+2\sqrt{17}}{16}\right)x-\left(\frac{8+8\sqrt{17}}{16}\right)x+\left(\frac{-10+6\sqrt{17}}{16}\right)=0,\end{aligned}$$

,

alltså är funktionen $x(t)=\exp\left(\frac{1}{4}(1+\sqrt{17})t\right)$ en lösning för båda differentialekvationerna.