Ratkaisuehdotuksia 4.harjoituksiin

1.

Oletetaan maapallo homogeeniseksi palloksi, jonka säde on 6400 km ja vetovoiman kiihtyvyyden itseisarvo pinnalla $10m/s^2$. Maapallon sisällä vetovoiman kiihtyvyys osoittaa kohti keskipistettä ja sen itseisarvo on suoraan verrannollinen etäisyyteen keskipisteestä. Osoita, että jos maapallon pinnan pisteestä toiseen on rakennettu suora rautatietunneli, niin se aika, jonka veturiton juna tarvitsee tämän kulkemiseen,kun lähtönopeus on 0 ja kun ilman ym. vastusta ei oteta huomioon, on riippumaton tunnelin pituudesta. Määritä tämä aika.

Ratkaisu.

Mallinnetaan tilannetta tason karteesisessa koordinaatistossa. Kaksi ulottuvuutta riittää, koska tunnelin päätepisteet ovat aina jollakin Maapallon isoympyrällä, ja voimme tarkastella planeetan poikkileikkausta tämän isoympyrän kohdalla. Sijoitetaan Maapallon keskipiste origoon, jolloin Maapallosta (tai sen poikkileikkauksesta) tulee origokeskinen ympyrä, jonka säde on 6400km. Voimme olettaa, että tunneli on tämän ympyrän x-akselin suuntainen jänne, jonka päätepisteet ovat (x_0, y_0) ja $(-x_0, y_0)$. Emme tarvitse varsinaisesti y-koordinaatteja ratkaisussa.

Olkoon $x(t)$ junan sijainnin x-koordinaatti ajanhetkellä t. Oletetaan, että juna lähtee pisteestä (x_0, y_0). Junaan vaikuttava painovoima $\bar{G}$ on vektori, jonka suunta on kohti origoa ja suuruus $G = mKr$, missä m on junan massa, K on jokin vakio (laskemme tämän myöhemmin) ja r on junan etäisyys origosta. Vektori $\bar{G}$ ja sen vaakasuora komponentti $\bar{G}_x$ sekä pystysuora komponentti $\bar{G}_y$ muodostavat suorakulmaisen kolmion. Tämä kolmio on yhdenmuotoinen sen kolmion kanssa, jonka muodostavat junan sijainnin r:n suuruinen paikkavektori origon suhteen (oikeastaan tämän vastavektori) sekä tämän pystysuora komponentti ja vaakasuora komponentti $(-x(t), 0)$. Koska $\bar{G}$:n pituudelle G pätee $G = mKr$ ja kolmiot ovat yhdenmuotoiset, $\bar{G}$:n vaakasuoralle komponentille $\bar{G}_x$ pätee $G_x = -mKx(t)$. Soveltamalla Newtonin toista lakia $\bar{F} = m\bar{a}$ saamme ju! nan vaakasuoralle, eli tunnelin suuntaiselle kiihtyvyydelle yhtälön

$$\ddot{x}(t) = \frac{G_x}{m} = -Kx(t) \iff \ddot{x}(t) + -Kx(t) = 0$$

Kiihtyvyyden suuruus on tässä negatiivista, sillä liike suuntautuu oikealta vasemmalle. Yhtälö on lineaarinen toisen asteen differentiaaliyhtälö, jonka karakteristinen yhtälö on $r^2+K = 0$. Tämän juuret ovat $\sqrt{k}i$ ja $-\sqrt{k}i$. Täten differentiaaliyhtälön perusjärjestelmä on $\left(\sin\left(\sqrt{k}t\right), \cos\left(\sqrt{k}t\right)\right)$. Siis DY:n yleinen ratkaisu on

$$x(t) = c_1 \sin\left(\sqrt{k}t\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{k}t\right),$$

missä c_1 ja c_2 ovat reaalisia vakioita.

Alkuehdot ovat $\dot{x}(0) = 0$, koska juna lähtee levosta, sekä $x(0) = p$. Sijoittamalla nämä yleiseen ratkaisuun saadaan $x(0) = c_2 = p$ ja $\dot{x}(0) = \sqrt{k}c_1 \cos(0) = 0 \iff c_1 = 0$. Alkuarvotehtävän ratkaisu on tällöin

$$x(t) = p \cos\left(\sqrt{k}t\right).$$

Haluamme ratkaista sen ajanhetken t_0 jona juna tulee ulos tunnelin toisesta päästä pisteessä $(-x_0, y_0)$, eli jolloin $x(t_0) = -p$:

$$x(t_0) = -p \iff -p = p\cos\left(\sqrt{k}t_0\right) \iff -1 = \cos\left(\sqrt{k}t_0\right)$$
$$\iff \sqrt{k}t_0 = \pi \iff t_0 = \frac{\pi}{\sqrt{k}}.$$

Tunnelin läpi kulkemiseen kuluva aika on siis vakio. Lasketaan lopuksi tämä aika. Tiedämme kertoimen K, sillä tehtävässä on oletettu, että Maapallon pinnalla putoamiskiihtyvyys on $10 = 6400000K$, josta saadaan $\sqrt{K} = \frac{1}{800}$.

Siis $t_0 = 800\pi \approx 2513s \approx 42$ min.

2.

Hiukkaseen, jonka massa on m, vaikuttaa keskeisvoima $F = (-K/r^2)u_r$. Hetkellä $t = 0$ hiukkanen on pisteessä $(r, \theta) = (1, 0)$ ja sen nopeus on $v_0 u_\theta$. Millä v_0:n arvolla hiukkasen liikerata on

(a) ellipsi?
(b) ympyrä?
(c) paraabeli?
(d) hyperbeli?

Ratkaisu.

Hiukkasen rata on muotoa

$$r(\vartheta) = \frac{ep}{1 + e\cos(\vartheta - \delta)},$$

jossa $e = c * c_1^2/K/m$, $p = \frac{1}{c}$ ja parametrit c, c_1 sekä δ toteuttavat relaatiot

$$\begin{cases} c_1 = r_0^2\dot{\vartheta}_0 \\ \frac{K}{m}c_1^{-2} + c\cos(\vartheta_0 - \delta) = \frac{1}{r_0} \\ c\sin(\vartheta_0 - \delta) = \frac{\dot{r_0}}{r_0^2\dot{\vartheta}_0}. \end{cases}$$

Alkuehdoista $(r_0, \vartheta_0) = (1, 0)$ ja $\bar{v_0} = \dot{r_0} r_0 u_r + \dot{\vartheta}_0 u_\vartheta = v_0 u_\vartheta$ saadaan

$$\begin{cases} r_0 = 1 \\ v_0 = 1 \\ \dot{r_0} = 0 \\ \dot{\vartheta}_0 = 1, \end{cases}$$

joten ylläoleva yhtälöryhmä on
$$\begin{cases} c_1 = v_0 \\ \frac{K}{m} v_0^{-2} + c\cos\delta = 1 \\ c\sin\delta = 0. \end{cases}$$
Tästä saadaan ratkaistua $c = 1 - \frac{K/m}{v_0^2}$.
Hiukkasen radan muoto määräytyy parametrista

$$e = \left(1 - \frac{K/m}{v_0^2}\right)\frac{v_0^2}{K/m} = \frac{v_0^2}{K/m} - 1$$

siten, että rata on

(a) ellipsi, kun $e < 1$, (b) ympyrä, kun $e = 0$, (c) paraabeli, kun $e = 1$ ja (d) hyperbeli, kun $e > 1$.

3.

Ratkaise vakioiden varioimiskeinoa käyttäen alkuarvotehtävä

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = e^t \cos t, x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$

Vastaava homogeeniyhtälö on $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0$, ja tämän karakteristinen yhtälö on $r^2 + 3r + 2 = 0$, jolla on kaksi erisuurta reaalijuurta $r = -2$ ja $r = -1$. Tällöin homogeeniyhtälön perusjärjestelmä on lauseen 3.11 nojalla pari (e^{-2t}, e^{-t}).

Etsitään yleistä ratkaisua yritteellä $x(t) = c_1(t)e^{-2t} + c_2(t)e^{-t}$. Tällöin $\dot{x}(t) = \dot{c}_1(t)e^{-2t} + \dot{c}_2(t)e^{-t} - 2c_1(t)e^{-2t} - c_2e^{-t}$.

Asetetaan funktioille c_1 ja c_2 ehto

$$\dot{c}_1(t)e^{-2t} + \dot{c}_2(t)e^{-t} = 0.$$

Tällöin $\dot{x}(t) = -2c_1(t)e^{-2t} - c_2e^{-t}$ ja $\ddot{x}(t) = -2\dot{c}_1(t)e^{-2t} - \dot{c}_2(t)e^{-t} + 4c_1e^{-2t} + c_2e^{-t}$.

Sijoittamalla yrite alkuperäiseen yhtälöön saadaan

$$L(x) = -2\dot{c}_1(t)e^{-2t} - \dot{c}_2(t)e^{-t} + c_1(4e^{-2t} - 6e^{-2t} + 2e^{-2t}) + c_2(e^{-t} - 3e^{-t} + 2e^{-t}) = -2\dot{c}_1(t)e^{-2t} - \dot{c}_2(t)e^{-t}.$$

Saamme yhtälön $L(x) = e^t \cos t$ kanssa yhtäpitävän yhtälöparin
$$\begin{cases} \dot{c}_1(t)e^{-2t} + \dot{c}_2(t)e^{-t} = 0 \\ -2\dot{c}_1(t)e^{-2t} - \dot{c}_2(t)e^{-t} = e^t \cos t. \end{cases}$$
Ratkaistaan tämä muuttujien $\dot{c}_1$ ja $\dot{c}_2$ lineaarisena yhtälöparina. Ratkaisu on olemassa, sillä lineaariparin determinantti on

$$\begin{vmatrix} e^{-2t} & e^{-t} \\ -2e^{-2t} & -e^{-t} \end{vmatrix} = (-e^{-t})e^{-2t} - e^{-t}(-2e^{-2t}) = e^{-3t}.$$

Tämä on täsmälleen homogeeniyhtälön perusjärjestelmän Wronskin determinantti $W(e^{-2t}, e^{-t})(t)$. Yhtälöparin ratkaisu on

$$\dot{c}_1(t) = -\frac{e^t \cos t e^{-t}}{e^{-3t}} = -\cos t e^{3t}$$

$$\dot{c}_2(t) = \frac{e^t \cos t e^{-2t}}{e^{-3t}} = \cos t e^{2t}.$$

Lasketaan seuraavaksi integraalit. Ensin funktio $c_1(t)$. Osittaisintegroidaan:

$$-c_1(t) = \int \cos t e^{3t} dt = \sin t e^{3t} - \int 3 \sin t e^{3t} dt.$$

Osittaisintegroidaan toisen kerran:

$$\sin t e^{3t} - 3 \int \sin t e^{3t} dt = \sin t e^{3t} - 3(-\cos t e^{3t} + \int 3 \cos t e^{3t} dt) = \mathrm{sin} t e^{3t} + 3 \cos t e^{3t} - 9 \int \cos t e^{3t} dt.$$

Saadaan yhtälö

$$\int \cos t e^{3t} dt = \sin t e^{3t} + 3 \cos t e^{3t} - 9 \int \cos t e^{3t} dt \sim \int \cos t e^{3t} dt = \frac{1}{10} e^{3t}(\sin t + 3 \cos t).$$

Siis $c_1(t) = -\frac{1}{10} e^{3t}(\sin t + 3 \mathrm{cos} t)$.
Samalla tavalla voidaan selvittää funktio $c_2(t)$:
Sitten funktio $c_2(t)$. Osittaisintegroidaan:

$$c_2(t) = \int \cos t e^{2t} dt = \sin t e^{2t} - \int 2 \sin t e^{2t} dt$$

ja taas osittaisintegroidaan toisen kerran:

$$\sin t e^{2t} - 2 \int \sin t e^{2t} dt = \sin t e^{2t} - 2(-\cos t e^{2t} + \int 2 \cos t e^{2t} dt) = \sin t e^{2t} + 2 \cos t e^{2t} - 4 \int \cos t e^{2t} dt,$$

jolloin saadaan yhtälö

$$\int \cos t e^{2t} dt = \sin t e^{2t} + 2 \cos t e^{3t} - 4 \int \cos t e^{3t} dt \sim \int \cos t e^{3t} dt = \frac{1}{5} e^{2t}(\sin t + 2 \cos t).$$

Siis $c_2(t) = \frac{1}{5} e^{2t}(\mathrm{sin} t + 2 \cos t)$.
On löydetty EHY:n yksittäisratkaisu

$$x_p(t) = c_1(t) e^{-2t} + c_1(t) e^{-t} = (-\frac{1}{10} e^{3t}(\sin t + 3 \cos t)) e^{-2t} + (\frac{1}{5} e^{2t}(\sin t + 2 \cos t)) e^{-t}$$

$$= \frac{1}{10}e^t(\sin t + \cos t).$$

Superpositioperiaatteen nojalla yleinen ratkaisu on

$$x(t) = x_p(t) + C_1e^{-2t} + C_2e^{-t} = \frac{1}{10}e^t(\sin t + \cos t) + C_1e^{-2t} + C_2e^{-t},$$

missä $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ovat vakioita.
Määritetään lopuksi vakiot alkuarvojen avulla.

$$x(0) = \frac{1}{10}e^0(\sin(0) + \cos(0) + C_1e^{-2*0} + C_2e^0 = \frac{1}{10} + C_1 + C_2 = 0$$

ja koska $\dot{x}(t) = \frac{1}{10}e^t(\sin t + \cos t) + \frac{1}{10}e^t(\cos t - \sin t) - 2C_1e^{-2t} - C_2e^{-t}$,

$$\dot{x}(0) = \frac{1}{10} + 1 - 2C_1 - C_2 = 0.$$

Saadaan yhtälöpari
$\begin{cases} C_1 + C_2 = -\frac{1}{10} \\ 2C_1 + C_2 = \frac{11}{10}. \end{cases}$
Kertomalla jälkimmäinen yhtälö -1:llä ja laskemalla puolittain yhteen saadaan ratkaistua $C_1 = \frac{12}{10}$, ja edelleen $C_2 = -\frac{13}{10}$.
Alkuarvotehtävän yleinen ratkaisu on siis

$$x(t) = \frac{1}{10}e^t(\sin t + \cos t) + \frac{6}{5}e^{-2t} - \frac{13}{10}e^{-t}.$$

4.

Olkoot α ja g positiivisia vakioita. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + g = 0, x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0$$

ja määritä se arvo $t = T$, jolle $\dot{x}(T) = 0$. Kyseessä on hetkellä $t = 0$ alkunopeudella $v0$ pystysuoraan ylöspäin heitetyn m-massaisen kappaleen nousukorkeus x ajan t funktiona sekä lentoaika T lakikorkeuteen, kun kappaleeseen vaikuttaa maan vetovoimamg sekä nopeuteen suoraan verrannollinen ilmanvastusvoima $m\alpha g$.

Ratkaisu.

Yhtälöä vastaava homogeeniyhtälö on

$$\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) = 0.$$

Tämän karakteristinen yhtälö on $r^2 + \alpha r = 0$, jolla on erisuuret reaalijuuret $r = 0$ ja $r = -\alpha$. Lauseen 3.11 nojalla homogeeniyhtälöllä on perusjärjestelmä $(1, e^{-\alpha t})$. Koska täydellinen yhtälö on muotoa $L(x) = g$, kokeillaan yritteenä ensimmäisen asteen polynomia $At + B$. Vakiofunktio ei toimi yritteenä, koska se sisältyy homogeeniyhtälön yleiseen ratkaisuun. Sijoitetaan yrite täydelliseen yhtälöön:

$$\ddot{x}(t)+\alpha\dot{x}(t)+g=0+\alpha A+g=0 \iff A=-\frac{g}{\alpha}.$$

Olemme löytäneet täydellisen yhtälön yksittäisratkaisun $x_p(t) = -\frac{g}{\alpha}t$ ja siten myös yleisen ratkaisun

$$x(t)=x_p(t)+C_1*1+C_2e^{-\alpha t}=-\frac{g}{\alpha}t+C_1+C_2e^{-\alpha t},$$

jossa C_1 ja C_2 ovat mielivaltaisia reaalivakioita.

Määritetään vakiot alkuarvojen avulla: $x(0)=-\frac{g}{\alpha}t*0+C_1+C_2e^0=C_1+C_2$. Koska $\dot{x}(t)=-\frac{g}{\alpha}+C_2\alpha e^{-\alpha t}$, saadaan $\dot{x}(0)=-\frac{g}{\alpha}-C_2\alpha=v_0$. Siis $C_2=-\frac{g}{\alpha^2}-\frac{v_0}{\alpha}$ ja $C_1=-C_2=+\frac{g}{\alpha^2}+\frac{v_0}{\alpha}$.

Tästä saadaan yleinen ratkaisu annetuilla alkuarvoilla:

$$x(t)=-\frac{g}{\alpha}+(\frac{g}{\alpha^2}+\frac{v_0}{\alpha})(1-e^{\alpha t}).$$

Lasketaan vielä saadun ratkaisun derivaatan nollakohta:

$$-\frac{g}{\alpha}+(\frac{g}{\alpha}+v_0)e^{-\alpha t}=0 \iff e^{-\alpha t}=\frac{1}{1+\frac{v_0\alpha}{g}} \iff t=\frac{\log|1+\frac{v_0\alpha}{g}|}{\alpha}$$

.

5.

Määritä ne reaaliset a:n arvot, joilla yhtälöillä

$$\ddot{x}+2a\dot{x}-4x=0,$$

$$\ddot{x}-2\dot{x}+ax=0,$$

on yhteinen ei-triviaali ratkaisu. Ratkaise yhtälöt saaduilla a:n arvoilla.

Ratkaisu.

Oletetaan, että kahdesti jatkuvasti derivoituva funktio $x(t)$ toteuttaa molemmat yhtälöt. Tällöin x toteuttaa yhtälön $(2a+2)\dot{x}-(a+4)x=0$, joka on saatu alkuperäisestä yhtälöparista vähentämällä puolittain. Tämä yhtälö on separoituva ja ratkeaa seuraavasti separoituvan yhtälön standardilla ratkaisumenetelmällä:

$$(2a+2)\dot{x}-(a+4)x=0 \iff \frac{\dot{x}}{x}=\frac{a+4}{2a+2} \iff \int\frac{1}{x}dx=\int\frac{a+4}{2a+2}dt$$
$$\iff \log|x|=\frac{a+4}{2a+2}t+\log|C| \iff x(t)=C\exp\left(\frac{a+4}{2a+2}\right)$$

Tämän jälkeen on selvitettävä, millä a:n arvoilla saatu funktio x toteuttaa alkuperäiset yhtälöt. Sijoitetaan $x(t)=\exp(\frac{a+4}{2a+2}t)$ yhtälöön $\ddot{x}+2a\dot{x}-4x=0$. Parametrista C ei tarvitse välittää, sillä se tulisi joka tapauksessa koko yhtälön yhteiseksi tekijäksi ja voitaisiin jakaa pois. Saadaan

$$\left(\frac{a+4}{2a+2}\right)^2 + 2a\left(\frac{a+4}{2a+2}\right) - 4 = 0 \iff \left(\frac{a+4}{2a+2}\right)^2 = \left(\frac{8a+8}{2a+2}\right) - \left(\frac{2a^2+8a}{2a+2}\right)$$
$$\iff \frac{(a+4)^2}{2a+2} = 8 - 2a^2 \iff a^2 + 8a + 16 = 16a - 4a^3 + 16 - 4a^2$$
$$\iff 4a^3 + 5a^2 - 8a = 0$$

Sijoittamalla $x(t)$ yhtälöön $\ddot{x} - 2\dot{x} + ax = 0$ saadaan täsmälleen sama kolmannen asteen yhtälö. Tällä yhtälöllä on selvästi juuri $a = 0$; muut juuret saadaan ratkaisemalla toisen asteen yhtälö $4a^2 + 5a - 8 = 0$, ja ne ovat $a = \frac{-5-3\sqrt{17}}{8}$ sekä $a = \frac{-5+3\sqrt{17}}{8}$.

Sijoittamalla saadut a:n arvot yhtälöön $x(t) = \exp(\frac{a+4}{2a+2}t)$ saadaan kolme eri kandidaattia tehtävänannon kahden differentiaaliyhtälön yhteisiksi ratkaisuiksi.

Tapaus $a = 0$: $x(t) = \exp(\frac{0+4}{2*0+2}t) = e^{2t}$. Koska

$$\ddot{x} + 2a\dot{x} - 4x = 4e^{2t} + 2*0 - 4e^{2t} = 0$$

ja

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + ax = 4e^{2t} - 2*2e^{2t} + 0 = 0,$$

funktio $x(t) = e^{2t}$ on molempien differentiaaliyhtälöiden ratkaisu.

Tapaus $a = \frac{-5-3\sqrt{17}}{8}$: Sijoittamalla kyseinen a yhtälöön $x(t) = \exp(\frac{a+4}{2a+2}t)$ saadaan

$$x(t) = \exp\left(\left(\frac{-5-3\sqrt{17}+32}{-10-6\sqrt{17}+16}\right)t\right) = \exp\left(\left(\frac{27-3\sqrt{17}}{6-6\sqrt{17}}\right)t\right)$$
$$= \exp\left(\left(\left(\frac{1}{2}\right)\frac{9-\sqrt{17}}{1-\sqrt{17}}\right)t\right) = \exp\left(\left(\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\left(1+\sqrt{17}\right)\left(9-\sqrt{17}\right)}{1-17}\right)t\right)$$
$$= \exp\left(\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{17}\right)t\right).$$

Tällöin

$$\ddot{x} + 2a\dot{x} - 4x = \left(\frac{18-2\sqrt{17}}{16}\right)x + \left(\frac{46+2\sqrt{17}}{16}\right)x - 4x = 0$$

ja

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{x} + ax &= \left(\frac{18-2\sqrt{17}}{16}\right)x - \left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)x + \left(\frac{-5-3\sqrt{17}}{8}\right)x \\ &= \left(\frac{18-2\sqrt{17}}{16}\right)x - \left(\frac{8-8\sqrt{17}}{16}\right)x + \left(\frac{-10-6\sqrt{17}}{16}\right)x = 0,\end{aligned}$$

joten funktio $x(t) = \exp\left(\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{17}\right)t\right)$ on molempien differentiaaliyhtälöiden ratkaisu.

Tapaus $a = \frac{-5+3\sqrt{17}}{8}$:

Sijoittamalla yhtälöön $x(t) = \exp(\frac{a+4}{2a+2}t)$ saadaan

$$\exp\left(\left(\frac{9+17}{2+2\sqrt{17}}\right)t\right) = \exp\left(\left(\frac{\left(9+\sqrt{17}\right)\left(\sqrt{17}-1\right)}{32}\right)t\right) = \exp\left(\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{17}\right)t\right).$$

Tällöin

$$\ddot{x} \;+\; 2a\dot{x} \;-\; 4x \quad = \quad \left(\frac{18+2\sqrt{17}}{16}\right)x \;+\; \left(\frac{46-2\sqrt{17}}{16}\right)x \;-\; 4x \quad = \quad 0$$

ja

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{x} + ax &= \left(\frac{18+2\sqrt{17}}{16}\right)x - \left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)x + \left(\frac{-5+3\sqrt{17}}{8}\right)x \\ &= \left(\frac{18+2\sqrt{17}}{16}\right)x - \left(\frac{8+8\sqrt{17}}{16}\right)x + \left(\frac{-10+6\sqrt{17}}{16}\right) = 0,\end{aligned}$$

,

joten funktio $x(t) = \exp\left(\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{17}\right)t\right)$ on molempien differentiaaliyhtälöiden ratkaisu.