Differentialekvationer I

3. övningens lösningsförslag, våren 2016

1. Bestäm de allmäna lösningarna till följande differentialekvationer.

   (a) $\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0$,

   (b) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$,

   (c) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 10x = 0$.

   Lösning: Alla differentialekvationer i uppgiften är lineära homogena ekvationer av andra ordningen, vars lösningar fås genom att lösa ut den karakteristiska ekvationens rötter.

   (a) Vi löser den motsvarande karakteristiska ekvationen:

$$\begin{aligned} r^2 - 5r + 6 &= 0 \\ (r-2)(r-3) &= 0 \\ r = 2 \text{ tai } r &= 3 \end{aligned}$$

   Rötterna är olika och reella, så enligt Sats 3.11 fås lösningarna $x_1 = e^{2t}$ och $x_2 = e^{3t}$, som bildar den homogena ekvationens bassystem. Således fås den allmänna lösningen

$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

   (b) Vi löser ut den motsvarande karakteristiska ekvationens rötter:

$$\begin{aligned} r^2 + 4r + 4 &= 0 \\ (r+2)(r+2) &= 0 \\ r &= -2 \end{aligned}$$

   Nu är roten en dubbelrot, så enligt Sats 3.12 fås lösningarna $x_1 = te^{-2t}$ och $x_2 = e^{-2t}$, som bildar den homogena ekvationens bassystem. Således fås den allmänna lösningen

$$x(t) = c_1 te^{-2t} + c_2 e^{-2t}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(c) Vi löser ut den motsvarande karakteristiska ekvationens rötter:

$$
\begin{aligned}
r^2 + 2r + 10 &= 0 \\
(r + 1 - 3i)(r + 1 - 3i) &= 0 \\
r &= -1 \pm 3i
\end{aligned}
$$

Denna gång är rötterna komplexa, så enligt Sats 3.13 fås lösningarna $x_1 = e^{-t}\cos(3t)$ och $x_2 = e^{-t}\sin(3t)$, som bildar den homogena ekvationens bassystem. Således fås den allmänna lösningen

$$x(t) = c_1 e^{-t}\cos(3t) + c_2 e^{-t}\sin(3t), c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Lös följande begynnelsevärdesproblem

(a) $\ddot{x} + \dot{x} + x = t, x(0) = \dot{x}(0) = 0,$

(b) $\ddot{x} + 4x = 0, x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1,$

(c) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = e^{-t}, x(0) = 1, \dot{x}(0) = 1.$

(a) Denna ekvation är icke-homogen. Vi söker en partikulärlösningen för ekvationen genom ansatsen $x(t) = At + B,\ A, B \in \mathbb{R}$. Nu gäller

$$\dot{x} = A,\ \ddot{x}(0) = 0.$$

Substituering i den icke-homogena ekvationen ger

$$A + At + B = t,$$

från vilket konstanterna A och B löses,

$$\begin{cases} A = 1 \\ A + B = 0 \end{cases}$$

alltså $A = 1$ och $B = -1$. Därmed fås som en partikulär lösning

$$x_p = t - 1.$$

Kvar lämnar nu att lösa den homogena ekvationen $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$. Dess karakteristiska ekvation är

$$r^2 + r + 1 = 0,$$

Från vilken vi genom exempelvis rotformeln får att

$$r = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Rötterna är komplexa, alltså bildas bassystem

$$x_1 = e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t \text{ och } x_2 = e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

Den allmänna lösningen fås genom att addera den partikulära lösningen med den homogena ekvationens lösning

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) + t - 1.$$

Nu kan vi lösa det givna BVP $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Vi får

$$\begin{cases} x(0) = 1 \cdot (c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0) + 0 - 1 = 0 \\ \dot{x}(0) = -\frac{1}{2}\left(c_1 \cdot 1 + c_1 \cdot 0\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot c_1 \cdot 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot c_2 \cdot 1\right) + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = c_1 - 1 \\ 0 = -\frac{1}{2}c_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 + 1 \end{cases}$$

$$c_1 = 1 \text{ och } c_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Begynnelsevärdesproblemets lösning är alltså

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) + t - 1.$$

(b) Vi löser ut den karakteristiska ekvationens rötter

$$\begin{aligned} r^2 + 4 &= 0 \\ r^2 &= -4 \\ r &= \pm 2i. \end{aligned}$$

Juuret ovat kompleksiarvoiset. Saadaan siis ratkaisut $x_1 = \cos 2t$ ja $x_2 = \sin 2t$. Yleinen ratkaisu on

$$x(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Vi löser konstanterna med att insätta begynnelsevärden $x(0) = 0$ och $\dot{x}(0) = 1$ i den allmänna lösningen

$$\begin{cases} x(0) = c_2 \cdot 1 + 0 = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 + c_2 \cdot 2 = 1 \end{cases}$$

$$c_1 = 0 \text{ och } c_2 = \frac{1}{2}.$$

Begynnelsevärdesprobemets lösning är

$$x(t) = \frac{1}{2} \sin 2t.$$

(c) Vi löser först den homogena ekvationen. Från den karakteristiska ekvationen fås

$$\begin{aligned} r^2 + 2r + 1 &= 0 \\ (r+1)(r+1) &= 0 \\ r &= -1. \end{aligned}$$

Roten är alltså reell och en dubbelrot. Den homogena ekvationens lösning är alltså

$$x_{HY} = c_1 t e^{-t} + c_2 e^{-t}.$$

En lämplig ansats är $x(t) = At^2e^{-t}$. Som ansats räcker inte $x(t) = Ae^{-t}$, trots att den är av samma form som den icke-homogena ekvationens högra sidan, eftersom en term av denna form förekommer i lösningen som fås från bassystemet, så den måste ännu multipliceras med termen t^2. (Av denna orsak kan det vara en bra idé att först lösa den homogena ekvationen och sedan söka upp den partikulära lösningen).

Vi substituerar den ursprungliga ekvationen med ansatsen och dess derivator

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} + 2\dot{x} + x = e^{-t}\left(2A - 2At - 2At + At^2 + 4At - 2At^2 + At^2\right) = e^{-t} \\
2Ae^{-t} = e^{-t} \\
A = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Allmäna lösningen är alltså

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2e^{-t} + c_1te^{-t} + c_2e^{-t}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Vi löser begynnelsevärdesproblemet genom att insätta begynnelsevärdena i den allmäna lösningen

$$\begin{cases} 1 = 0 + c_2 \\ 1 = e^0(-\frac{1}{2} \cdot 0 - c_1 \cdot 0 - c_2 + 0 + c_1) = -c_2 + c_1 \end{cases}$$

$$c_1 = 2 \text{ ja } c_2 = 1.$$

Vi får

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2e^{-t} + 2te^{-t} + e^{-t}.$$

3. Ekvationen

$$y' + P(x)y = (x+1)^2e^x$$

har

$$y(x) = (x^2 - 1)e^x$$

som partikulärlösning. Bestäm den allmänna lösningen.

Lösning: Vi substituerar in den givna partikulära lösningen i ekvationen och löser ut $P(x)$.

$$
\begin{aligned}
y' + P(x)y &= 2xe^x + (x^2-1)e^x + P(x)(x^2-1)e^x \\
&= (2x + x^2 - 1 + P(x)x^2 - P(x))e^x \\
&= (x^2 + 2x + 1)e^x
\end{aligned}
$$

Genom att undersöka ekvationen noggrannare får vi att $P(x)$ måste uppfylla ekvationen

$$-1 + P(x)x^2 - P(x) = 1$$

alltså $P(x) = \frac{2}{x^2-1}$, $x \neq \pm 1$.

Vi löser den homogena ekvationen genom att separera

$$\begin{aligned}
y' + \frac{2}{x^2-1}y &= 0 \\
\int \frac{1}{y}dy &= -\int \frac{2}{x^2-1}dx \\
&= \ln\left(|\frac{x+1}{1-x}|\right) + C, C \in \mathbb{R} \\
y &= |\frac{x+1}{x-1}|D, D \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Den allmäna lösningen fås genom att addera den homogena ekvationens lösning med den givna partikulära lösningen.

$$y(x) = |\frac{x+1}{1-x}|D + (x^2-1)e^x, D \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, x \neq 1.$$

4. Visa att följande differentialekvationer är exakta och bestäm i vartdera fallet den allmäna lösningen.

   (a) $2xy + 3 + (x^2 - 1)y' = 0$

   (b) $e^{-y} + (1 - xe^{-y}) = 0$

(a) Eftersom $M(x,y) = 2xy + 3 \in C^1(\mathbb{R}^2)$ och $N(x,y) = (x^2 - 1) \in C^1(\mathbb{R}^2)$, så ser vi att

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y), \text{ kaikilla } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

alltså är ekvationen exakt. Till näst

$$
\begin{aligned}
F(x,y) &= \int M(x,y)dx + g(y) \\
&= \int 2xy + 3dx + g(y) \\
&= x^2y + 3x + g(y) \\
\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= x^2 + g'(y) = N(x,y) = x^2 - 1 \\
g'(y) &= -1.
\end{aligned}
$$

Vi får $g(y) = -y$ och insätter detta i ekvationen $F(x,y)$

$$
F(x,y) = x^2y + 3x - y = y(x^2-1) + 3x = C, C \in \mathbb{R}.
$$

Lösningen kan lätt skrivas om i den explicita formen

$$
y = \frac{C-3x}{x^2-1}, x \neq \pm 1.
$$

(b) Vi kan konstatera ekvationen vara exakt, eftersom $M(x,y) = e^{-y} \in C^1(\mathbb{R}^2)$ och $N(x,y) = 1 - xe^{-y} \in C^1(\mathbb{R}^2)$, vilket ger

$$
\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = -e^{-y} = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y), \text{ kaikilla } (x,y) \in \mathbb{R}^2.
$$

Vi löser differentialekvationen

$$
\begin{aligned}
F(x,y) &= \int M(x,y)dx + g(y) \\
&= \int e^{-y}dx + g(y) \\
&= xe^{-y} + g(y) \\
\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= -xe^{-y} + g'(y) = N(x,y) = 1 - xe^{-y} \\
g'(y) &= 1.
\end{aligned}
$$

Vi får $g(y) = y$och sätter in den i ekvationen $F(x, y)$

$$F(x, y) = xe^{-y} + y = C, C \in \mathbb{R}.$$

Lösningen kan ännu skrivas explicit som en funktion av y

$$x(y) = (C - y)e^{y}, C \in \mathbb{R}.$$

5. Visa att om

$$\frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)\right) \qquad (*)$$

är en funktion av enbart y så har ekvationen

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0$$

en integrerande faktor $\mu(y)$ som också beror på enbart y.

Lösning: Anta att (*) gäller. Då gäller för en godtycklig deriverbar funktion $\mu(y)$att

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(y)M(x,y)\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(y)N(x,y)\right) &= \mu'(y)M(x,y) + \mu(y)\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) - \mu(y)\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) \\
&= \mu(y)\left(\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)\right) + \mu'(y)M(x,y) \\
&= \mu(y)g(y)M(x,y) + \mu'(y)M(x,y) \\
&= M(x,y)\left(\mu(y)g(y) + \mu'(x)\right)
\end{aligned}$$

Då $\mu(y)$ uppfyller den separerbara ekvationen

$$\mu'(x) = -g(y)\mu(x)$$

är den ursprungliga ekvationens integrerande faktor

$$\mu(y) = e^{-\int g(y)dy}.$$

6. Lös ekvationen

$$y + (2y^3 - x)y' = 0.$$

med hjälp av resultatet i föregående uppgift.

Lösning:

$$\begin{aligned}
h(y) &= \frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)\right) \\
&= \frac{1}{y}\left(\frac{\partial}{\partial y}y - \frac{\partial}{\partial x}(2y^3 - x)\right) \\
&= \frac{2}{y}(1+1) \\
&= \frac{2}{y}
\end{aligned}$$

Ekvationen $h(y)$ är alltså beroende endast av variabeln y.

Den integrerande faktorn är

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{2}{y}dy} = e^{\ln y^{-2}} = y^{-2}.$$

Vi får åtminstone i områdena $D_1 = \{(x,y) \mid y > 0\}$ och $D_2 = \{(x,y) \mid y < 0\}$ en ekvation som är kongruent med den ursprungliga differentialekvationen

$$\tilde{M} + \tilde{N}y' = y^{-1} + (2y - xy^{-2})y' = 0,$$

som kan lösas som en exakt ekvation.

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \int \tilde{M}dx + g(y) \\
&= y^{-1}x + g(y) \\
\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) &= -y^{-2}x + g'(y) = \tilde{N}(x,y) = 2y - xy^{-2} \\
g'(y) &= 2y \\
g(y) &= y^2 \\
F(x,y) &= y^{-1}x + y^2 = C, \text{ där } C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$