Differentiaaliyhtälöt I

3. harjoituksen ratkaisuehdotuksia, kevät 2016

1. Etsi seuraavien differentiaaliyhtälöiden yleiset ratkaisut.

(a) $\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0$,

(b) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$,

(c) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 10x = 0$.

Ratkaisu: Kaikki tehtävän differentiaaliyhtälöt ovat toisen asteen lineaarisia homogeeniyhtälöitä, joiden ratkaisut löytyvät karakteristisen yhtälön juurien avulla.

(a) Ratkaistaan vastaava karakteristinen yhtälö:

$$\begin{aligned} r^2 - 5r + 6 &= 0 \\ (r-2)(r-3) &= 0 \\ r = 2 \text{ tai } r &= 3 \end{aligned}$$

Saadut juuret ovat erit ja reaaliarvoiset, joten Lauseen 3.11 nojalla saadaan ratkaisut $x_1 = e^{2t}$ ja $x_2 = e^{3t}$, jotka muodostavat HY:n perusjärjestelmän. Näin ollen saadaan yleinen ratkaisu

$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Ratkaistaan karakteristisen yhtälön juuret:

$$\begin{aligned} r^2 + 4r + 4 &= 0 \\ (r+2)(r+2) &= 0 \\ r &= -2 \end{aligned}$$

Nyt juuret ovat samat, joten Lauseen 3.12 nojalla saadaan ratkaisut $x_1 = te^{-2t}$ ja $x_2 = e^{-2t}$, jotka muodostavat HY:n perusjärjestelmän. Näin ollen saadaan yleinen ratkaisu

$$x(t) = c_1 te^{-2t} + c_2 e^{-2t}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(c) Ratkaistaan karakteristisen yhtälön juuret:

$$\begin{aligned} r^2 + 2r + 10 &= 0 \\ (r + 1 - 3i)(r + 1 - 3i) &= 0 \\ r &= -1 \pm 3i \end{aligned}$$

Tällä kertaa saadut juuret ovat kompleksiarvoiset, joten Lauseen 3.13 nojalla saadaan ratkaisut $x_1 = e^{-t}\cos(3t)$ ja $x_2 = e^{-t}\sin(3t)$, jotka muodostavat HY:n perusjärjestelmän. Näin ollen saadaan yleinen ratkaisu

$$x(t) = c_1 e^{-t}\cos(3t) + c_2 e^{-t}\sin(3t), c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Ratkaise seuraavat alkuarvotehtävät

(a) $\ddot{x} + \dot{x} + x = t, x(0) = \dot{x}(0) = 0,$

(b) $\ddot{x} + 4x = 0, x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1,$

(c) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = e^{-t}, x(0) = 1, \dot{x}(0) = 1.$

(a) Tämä yhtälö on epähomogeeninen. Etsitään sille yksittäisratkaisu sopivalla yritteellä $x(t) = At + B$, $A, B \in \mathbb{R}$. Nyt

$$\dot{x} = A,\ \ddot{x}(0) = 0$$

.

Sijoitus epähomogeeniyhtälöön

$$A + At + B = t,$$

josta ratkaistaan vakiot A ja B

$$\begin{cases} A = 1 \\ A + B = 0 \end{cases}$$

eli $A = 1$ ja $B = -1$. Siten yksittäisratkaisuksi saadaan

$$x_p = t - 1.$$

Enää täytyy ratkaista vastaava homogeeniyhtälö $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$. Sen karakteristinen yhtälö on

$$r^2 + r + 1 = 0,$$

josta saadaan vaikka toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan avulla

$$r = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Juuret ovat kompleksiarvoiset, joten perusjärjestelmän muodostavat ratkaisut ovat

$$x_1 = e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t \text{ ja } x_2 = e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

Yleinen ratkaisu saadaan yhdistämällä yksittäisratkaisu ja HY:n ratkaisut

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) + t - 1.$$

Nyt voidaan ratkaista annettu AAT $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Saadaan

$$\begin{cases} x(0) = 1 \cdot (c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0) + 0 - 1 = 0 \\ \dot{x}(0) = -\frac{1}{2}\left(c_1 \cdot 1 + c_1 \cdot 0\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot c_1 \cdot 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot c_2 \cdot 1 \right) + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = c_1 - 1 \\ 0 = -\frac{1}{2}c_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 + 1 \end{cases}$$

$$c_1 = 1 \text{ ja } c_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

AAT:n ratkaisu on siis

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) + t - 1.$$

(b) Ratkaistaan KY:n juuret

$$\begin{aligned} r^2 + 4 &= 0 \\ r^2 &= -4 \\ r &= \pm 2i. \end{aligned}$$

Juuret ovat kompleksiarvoiset. Saadaan siis ratkaisut $x_1 = \cos 2t$ ja $x_2 = \sin 2t$. Yleinen ratkaisu on

$$x(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ratkaistaan vakiot sijoittamalla alkuehdot $x(0) = 0$ ja $\dot{x}(0) = 1$ yleiseen ratkaisuun

$$\begin{cases} x(0) = c_2 \cdot 1 + 0 = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 + c_2 \cdot 2 = 1 \end{cases}$$

$$c_1 = 0 \text{ ja } c_2 = \frac{1}{2}$$

AAT:n ratkaisu on

$$x(t) = \frac{1}{2} \sin 2t.$$

(c) Ratkaistaan ensin homogeeniyhtälö. Karakteristisesta yhtälöstä saadaan

$$\begin{aligned} r^2 + 2r + 1 &= 0 \\ (r+1)(r+1) &= 0 \\ r &= -1. \end{aligned}$$

Juuret ovat siis samat ja reaaliarvoiset. HY:n ratkaisu on siis

$$x_{HY} = c_1 t e^{-t} + c_2 e^{-t}.$$

Sopiva yrite on $x(t) = At^2 e^{-t}$. Yritteeksi ei riitä $x(t) = Ae^{-t}$, vaikka se on samaa muotoa EHY:n oikean puolen kanssa, koska tätä muotoa oleva termi esiintyy molemmissa perusjärjestelmän muodostavissa ratkaisuissa, joten on se on vielä kerrottava termillä t^2. (Tämän takia voi olla hyvä idea ratkaista ensin HY ja sitten etsiä yksittäisratkaisu).

Sijoitetaan yrite derivaattoineen alkuperäiseen yhtälöön

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\dot{x} + x = e^{-t}\left(2A - 2At - 2At + At^2 + 4At - 2At^2 + At^2\right) &= e^{-t} \\ 2Ae^{-t} &= e^{-t} \\ A &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Yleinen ratkaisu on siis

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2e^{-t} + c_1te^{-t} + c_2e^{-t}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ratkaistaan AAT:n vakiot sijoittamalla alkuehdot yleiseen ratkaisuun

$$\begin{cases} 1 = 0 + c_2 \\ 1 = e^0(-\frac{1}{2} \cdot 0 - c_1 \cdot 0 - c_2 + 0 + c_1) = -c_2 + c_1 \end{cases}$$

$$c_1 = 2 \text{ ja } c_2 = 1.$$

Saadaan

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2e^{-t} + 2te^{-t} + e^{-t}.$$

3. Yhtälön

$$y' + P(x)y = (x+1)^2e^x$$

eräs ratkaisu on

$$y(x) = (x^2 - 1)e^x.$$

Määritä yleinen ratkaisu.

Ratkaisu: Sijoitetaan annettu ratkaisu derivaattoineen alkuperäiseen yhtälöön ja ratkaistaan $P(x)$.

$$\begin{aligned} y' + P(x)y &= 2xe^x + (x^2-1)e^x + P(x)(x^2-1)e^x \\ &= (2x + x^2 - 1 + P(x)x^2 - p(x))e^x \\ &= (x^2 + 2x + 1)e^x \end{aligned}$$

Tarkastelemalla yhtälöä voidaan todeta, että funktion $P(x)$ on toteutettava yhtälö

$$-1 + P(x)x^2 - P(x) = 1$$

eli $P(x) = \frac{2}{x^2-1}$, $x \neq \pm 1$.

Ratkaistaan homogeeniyhtälö separoimalla

$$\begin{aligned}
y' + \frac{2}{x^2-1}y = 0 \\
\int \frac{1}{y} dy &= -\int \frac{2}{x^2-1} dx \\
&= \ln\left(|\frac{x+1}{1-x}|\right) + C, C \in \mathbb{R} \\
y &= |\frac{x+1}{x-1}|D, D \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Yleinen ratkaisu saadaan yhdistämällä HY:n ratkaisu ja annettu ratkaisu

$$y(x) = |\frac{x+1}{1-x}|D + (x^2-1)e^x, D \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, x \neq 1.$$

4. Osoita seuraavat differentiaaliyhtälöt eksakteiksi ja määritä yleiset ratkaisut.
   (a) $2xy + 3 + (x^2-1)y' = 0$
   (b) $e^{-y} + (1 - xe^{-y}) = 0$

(a) Koska $M(x,y) = 2xy + 3 \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ja $N(x,y) = (x^2-1) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ja

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y), \text{ kaikilla } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

DY on ekstakti. Seuraavaksi

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \int M(x,y)dx + g(y) \\
&= \int 2xy + 3dx + g(y) \\
&= x^2y + 3x + g(y) \\
\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= x^2 + g'(y) = N(x,y) = x^2 - 1 \\
g'(y) &= -1.
\end{aligned}$$

Saadaan $g(y) = -y$ ja sijoitetaan se yhtälöön $F(x, y)$

$$F(x,y) = x^2y + 3x - y = y(x^2 - 1) + 3x = C, C \in \mathbb{R}.$$

Ratkaisu saadaan helposti eksplisiittimuotoon

$$y = \frac{C - 3x}{x^2 - 1}, x \neq \pm 1.$$

(b) Voidaan todeta DY eksaktiksi, sillä $M(x, y) = e^{-y} \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ja $N(x, y) = 1 - xe^{-y} \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ja

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = -e^{-y} = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y), \text{ kaikilla } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ratkaistaan DY

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int M(x,y)dx + g(y) \\ &= \int e^{-y}dx + g(y) \\ &= xe^{-y} + g(y) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= -xe^{-y} + g'(y) = N(x,y) = 1 - xe^{-y} \\ g'(y) &= 1. \end{aligned}$$

Saadaan $g(y) = y$ ja sijoitetaan se yhtälöön $F(x, y)$

$$F(x,y) = xe^{-y} + y = C, C \in \mathbb{R}.$$

Ratkaisu voidaan vielä kirjoittaa eksplisiittisesti y:n funktiona

$$x(y) = (C - y)e^y, C \in \mathbb{R}.$$

5. Osoita, että jos

$$\frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)\right) \tag{*}$$

on pelkästään y:n funktio, niin yhtälöllä

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0$$

on muotoa $\mu(y)$ oleva integroiva tekijä.

Ratkaisu: Oletetaan, (*) että pätee. Tällöin mielivaltaiselle derivoituvalle funktiolle $\mu(y)$ pätee

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(y)M(x,y)\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(y)N(x,y)\right) &= \mu'(y)M(x,y) + \mu(y)\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) - \mu(y)\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) \\
&= \mu(y)\left(\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)\right) + \mu'(y)M(x,y) \\
&= \mu(y)g(y)M(x,y) + \mu'(y)M(x,y) \\
&= M(x,y)\left(\mu(y)g(y) + \mu'(x)\right)
\end{aligned}$$

Kun $\mu(y)$ toteuttaa separoituvan yhtälön

$$\mu'(x) = -g(y)\mu(x)$$

se on integroiva tekijä

$$\mu(y) = e^{-\int g(y)dy}.$$

6. Ratkaise edellisen tehtävän nojalla yhtälö

$$y + (2y^3 - x)y' = 0.$$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned}
h(y) &= \frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)\right) \\
&= \frac{1}{y}\left(\frac{\partial}{\partial y}y - \frac{\partial}{\partial x}(2y^3 - x)\right) \\
&= \frac{2}{y}(1+1) \\
&= \frac{2}{y}
\end{aligned}$$

Yhtälö $h(y)$ riippuu siis vain muuttujasta y.

Integroiva tekijä on

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{2}{y} dy} = e^{\ln y^{-2}} = y^{-2}.$$

Saadaan ainakin alueissa $D_1 = \{(x, y) \mid y > 0\}$ ja $D_2 = \{(x, y) \mid y < 0\}$ yhtäpitävä yhtälö alkuperäisen DY:n kanssa

$$\tilde{M} + \tilde{N}y' = y^{-1} + (2y - xy^{-2})y' = 0,$$

joka voidaan nyt ratkaista eksaktin yhtälön tapaan.

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= \int \tilde{M} dx + g(y) \\
&= y^{-1}x + g(y) \\
\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) &= -y^{-2}x + g'(y) = \tilde{N}(x, y) = 2y - xy^{-2} \\
g'(y) &= 2y \\
g(y) &= y^2 \\
F(x, y) &= y^{-1}x + y^2 = C, \text{ jossa } C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$