Differentialekvationer I

Lösningsförslag, 2. övningen, våren 2016

1. Bestäm den allmäna lösningen till följande ekvationer (här är $' = \frac{d}{dx}$):

   (a) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$,

   (b) $(1+x^2)\,y' - 2xy = (1+x^2)^2$,

   (c) $y' \sin x - y = 1 - \cos x$.

Lösning:

(a) I uppgiften är det frågan om en lineär differentialekvation av första ordningen, och enligt kursmaterialet betecknar vi $p(x) = 2x$, $q(x) = 2xe^{-x^2}$. Vi följer lösningsmetoden på sida 9 och får den integrerande faktorn $\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{x^2}$. Nu gäller

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2} \Leftrightarrow e^{x^2}y' + 2xye^{x^2} = 2xe^{x^2}e^{-x^2} \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(e^{x^2}y) = 2x$$
$$\Leftrightarrow e^{x^2}y = \int 2xdx = x^2 + C \Leftrightarrow y = e^{-x^2}(x^2 + C)$$

då $C \in \mathbf{R}$ är en konstant.

(b) Vi omskriver ekvationen till formen $y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 1 + x^2$, som också identifieras som en lineär differentialekvation av första ordningen för vilken gäller $p(x) = -\frac{2x}{1+x^2}$, $q(x) = 2xe^{-x^2}$ och den integrerande faktorn är $\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = \frac{1}{x^2+1}$.
På motsvarande vis såsom ovanom,

$$(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1}y' - \frac{2x}{(1+x^2)^2}y = 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x^2+1}\right) = 1 \Leftrightarrow y = (x+C)(1+x^2)$$

för något $C \in \mathbf{R}$.

(c) Vi omskriver ekvationen som normalformen av en lineär DE $y' - \frac{y}{\sin(x)} = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$, vilket ger $p(x) = \frac{1}{\sin(x)}$, $q(x) = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$, och eftersom

$\int -\frac{1}{\sin(x)} dx$
$= \ln|\cot(\frac{x}{2})|$, så är den integrerande faktorn $\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = \cot(\frac{x}{2})$. Nu gäller

$$y' - \frac{y}{\sin(x)} = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\cot(\frac{x}{2})y = -\cot(\frac{x}{2})\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$$
$$\Leftrightarrow \cot(\frac{x}{2})y = x + C \Leftrightarrow y = \tan(\frac{x}{2})C + x\tan(\frac{x}{2})$$

för något $C \in \mathbf{R}$.

2. Lös följande begynnelsevärdesproblem.

   (a) $xy' + 2y = x^3; \quad y(1) = 1,$

   (b) $y' + y\cos x = \sin x \cos x; \quad y(0) = 1.$

Lösning: I denna uppgift löser vi de lineära differentialekvationerna av första ordningen på liknande vis såsom i uppgift 1, men dessutom löser vi värden för konstanterna C med hjälp av begynnelsevärden som getts.

(a) Som tidigare skriver vi om ekvationen som normalformen av en lineär DE $y' + \frac{2}{x}y = x^2$. Nu $p(x) = \frac{2}{x}$, $q(x) = x^2$ och $\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = x^2$, $x \neq 0$. Nu får vi på bekant vis att

$$y' + \frac{2}{x}y = x^2 \Leftrightarrow x^2y' + \frac{2}{x}x^2y = x^4 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(x^2y) = x^4$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{5}x^3 + \frac{C}{x^2}$$

för $C \in \mathbf{R}$.
Från begynnelsevärdet $y(1) = 1$ följer att $1 + \frac{1}{5} + C$, från vilket vi får $C = \frac{4}{5}$, vars lösning för begynnelsevärdesproblemet då är $y(x) = \frac{1}{5}x^3 + \frac{4}{5}x^{-2}$.

(b) Ekvationen är färdigt i sin normalform och klart lineär. Nu gäller $p(x) = \cos(x)$, $q(x) = \sin(x)\cos(x)$ och $\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\sin(x)}$. Motsvarligen som ovan, så gäller

$$y' + y\cos(x) = \sin(x)\cos(x) \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(e^{\sin(x)}y)$$
$$= e^{\sin(x)}\sin(x)\cos(x) \Leftrightarrow y = \sin(x) - 1 + Ce^{-\sin(x)},$$

där det sista mellansteget fås genom partialintegrering och $C \in \mathbf{R}$. Från begynnelsevärdet $y(0) = 1$ följer $y(0) = \sin(0) - 1 + Ce^{-\sin(0)} = 1$ och vidare $C = 2$, vilket ger begynnelsevärdesproblemets lösning
$y(x) = \sin(x) - 1 + 2e^{-\sin(x)}$

3. Bestäm ekvationens
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$$
allmäna lösning.

Lösning: Eftersom $\frac{x+y}{x-y} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$, så substituerar vi $z = \frac{y}{x}$i ekvationen. Då följer
$$z' = \frac{1}{x}(y' - z) = \frac{1}{x}\left(\frac{1+z^2}{1-z}\right),$$
som är en separerbar ekvation. Vi löser ekvationen:
$$z' = \frac{1}{x}\left(\frac{1+z^2}{1-z}\right) \Leftrightarrow \int \frac{1-z}{1+z^2}dz = \int \frac{1}{x}dx = \log|x| + C$$
för något $C \in \mathbf{R}$. Eftersom
$$\int \frac{1-z}{1+z^2}dz = \int \frac{1}{1+z^2}dz = -\frac{1}{2}\int \frac{2z}{1+z^2}dz = \arctan(z) - \frac{1}{2}\log(z^2+1),$$
får vi ekvationen i formen
$$\arctan(z) - \frac{1}{2}\log(z^2+1) = \log|x| + C,$$
och genom att substituera tillbaka $z = \frac{y}{x}$ får vi ekvationens lösning i formen
$$\arctan(\frac{y}{x}) - \frac{1}{2}\log((\frac{y}{x})^2 + 1) = \log|x| + C,$$
som dock inte har en explicit lösning.

4. Lös Bernoullis ekvation

$$y' + 2xy + xy^4 = 0.$$

Lösning: Ekvationen identifieras lätt som en Bernoullis ekvation, och vi skriver om den som $y' + 2xy = -xy^4$. Med kursmaterialets beteckningar (s.18) gäller $p(x) = 2x$, $q(x) = -x$ och $\lambda = 4$. Ekvationen har en trivial lösning $y = 0$. Vi följer lösningsmetoden och omskriver ekvationen som lineär. Vi multiplicerar båda leden med termen y^{-4} och substituerar $z(x) = y(x)^{-3}$, av vilket följer $z' = -3y^{-4}y'$. Nu får vi den lineära differentialekvationen $-\frac{1}{3}z' + 2xz = -x$ och följaktligen $z' - 6xz = 3x$, där $p_1(x) = -6x$, $q_1(x) = 3x$ och $\mu_1(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{-3x^2}$. Slutligen

$$z' - 6xz = 3x \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(e^{-3x^2}z) = e^{-3x^2}3x \Leftrightarrow e^{-3x^2}z = -\frac{1}{2}e^{-3x^2} + C$$
$$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} + Ce^{3x^2}$$

för något $C \in \mathbf{R}$, och genom att substituera tillbaka fås lösningen $y(x) = (-2 + Ce^{3x^2})^{-\frac{1}{3}}$.

5. En population växer enligt den logistiska modellen

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

med parametern $r = 0.5$. Begynnelsepopulationens storlek är en hundradedel av bärkapaciteten K. Vid vilken tidpunkt är populationens storlek (a) 50%, (b) 90%, (c) 99% av bärkapaciteten?

Lösning: På sidan 27 i kursmaterialet har den logistiska ekvationen $N' = rN(1 - \frac{N}{K})$ lösts till formen

$$N = \frac{N_0K}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}}$$

där $N_0 = N(0)$ och i vårt fall är $r = 0.5$ samt $N_0 = \frac{K}{100}$.

(a) Vi vill undersöka fallet då $N = 0.5K$. Genom att sätta in detta i lösningen av ekvationen ovan, och genom att lösa ut t får vi tiden $t = 9,19024..$, alltså är populationens storlek hälften av bärkapaciteten efter ca. $9,2$ tidsenheter.

(b) Motsvarligen vill vi undersöka då $N = 0.9K$. Såsom ovan får vi tiden att vara $t = 13,5847..$, alltså når populationen 90% av sin bärkapacitet efter ca. $13,5$ tidsenheter.

(c) På motsvarande vis låter vi $N = 0.99K$ och genom insättning får vi tiden $t = 18,3805$.

6. Antag att påssjuka, röda hund och mässling sprider sig enligt SIR-modellen. Man har empiriskt visat att R_0 för dessa sjukdomar är 18 (påssjuka), 7 (röda hund), och 17 (mässling). Hur stor del av en population, där ingen har immunitetsskydd, insjuknar i dessa sjukdomar om en epidemi bryter ut?

   Lösning: Vi använder oss av den härledda SIR-modellen på kursmaterialets sidor 29 och 30, och antar dessutom att epidemin börjar från en väldigt liten del av populationen: $i(0) \approx 0$ och $s(0) \approx 1$. Infektionssjukdomens modellen kan approksimeras nu till $i(s) = 1 - s + \frac{1}{R_0} \ln s$. Eftersom vi är intresserade av modellens slutliga resultat, betecknar vi $i(s_\infty) = 0$ och får ekvationen i formen $s_\infty = 1 + \frac{1}{R_0} \ln s_\infty$.

   Nu gäller i vårt fall för alla sjukdomar $R_0 \gg 1$, vilket tyder på att $s_\infty \ll 1$. Nu får vi ekvationen skriven i formen $0 = 1 + \frac{1}{R_0} \ln s_\infty$, följaktligen som $s_\infty = e^{-R_0}$ och eftersom $r_\infty = 1 - s_\infty$, så får vi ekvationen i sin slutliga form $r_\infty = 1 - e^{-R_0}$. Genom att sätta in sjukdomarnas värde R_0 i denna ekvation får vi andelen r_∞ för dem som insjuknat i påssjuka $1 - 1,5 \cdot 10^{-8}$, röda hund $1 - 9,1 \cdot 10^{-4}$ och mässling $1 - 4,1 \cdot 10^{-8}$.