Differentiaaliyhtälöt I

Ratkaisuehdotuksia, 2. harjoitus, kevät 2016

1. Etsi seuraavien yhtälöiden yleiset ratkaisut (Tässä $' = \frac{d}{dx}$):

   (a) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$,

   (b) $(1+x^2)\,y' - 2xy = (1+x^2)^2$,

   (c) $y'\sin x - y = 1 - \cos x$.

   Ratkaisu:

   (a) Kyseessä on ensimmäisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö, ja luentomonisteen merkinnöin $p(x) = 2x$, $q(x) = 2xe^{-x^2}$. Lähdetään etenemään ratkaisumenetelmän (sivu 9) mukaan, ja integroiva tekijä $\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{x^2}$. Nyt

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2} \Leftrightarrow e^{x^2}y' + 2xye^{x^2} = 2xe^{x^2}e^{-x^2} \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(e^{x^2}y) = 2x$$
$$\Leftrightarrow e^{x^2}y = \int 2xdx = x^2 + C \Leftrightarrow y = e^{-x^2}(x^2 + C)$$

   kun $C \in \mathbf{R}$ on vakio.

   (b) Saatetaan yhtälö muotoon $y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 1 + x^2$, joka tunnistetaan myös lineaariseksi differentiaaliyhtälöksi jolla $p(x) = -\frac{2x}{1+x^2}$, $q(x) = 2xe^{-x^2}$ ja integroiva tekijä $\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = \frac{1}{x^2+1}$. Vastaavasti kuten yllä,

$$(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1}y' - \frac{2x}{(1+x^2)^2}y = 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x^2+1}\right) = 1 \Leftrightarrow y = (x+C)(1+x^2)$$

   jollain $C \in \mathbf{R}$.

   (c) Saatetaan yhtälö lineaarisen DY:n normaalimuotoon $y' - \frac{y}{\sin(x)} = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$, ja nyt $p(x) = \frac{1}{\sin(x)}$, $q(x) = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$, ja koska $\int -\frac{1}{\sin(x)}dx = \ln|\cot(\frac{x}{2})|$, integroiva tekijä $\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = \cot(\frac{x}{2})$. Nyt

$$y' - \frac{y}{\sin(x)} = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\cot(\frac{x}{2})y = -\cot(\frac{x}{2})\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$$
$$\Leftrightarrow \cot(\frac{x}{2})y = x + C \Leftrightarrow y = \tan(\frac{x}{2})C + x\tan(\frac{x}{2})$$

jollain $C \in \mathbf{R}$.

2. Ratkaise seuraavat alkuarvotehtävät.

   (a) $xy' + 2y = x^3; \quad y(1) = 1,$

   (b) $y' + y\cos x = \sin x \cos x; \quad y(0) = 1.$

   Ratkaisu: Tässä tehtävässä ratkaisemme lineaariset ensimmäisen kertaluvun yhtälöt vastaavasti kuten tehtävässä 1, mutta lisäksi ratkaisemme vakiot C alkuarvotehtävien (AAT) avulla.

   (a) Kuten tapana on, saatetaan yhtälö lineaarisen DY:n normaalimuotoon $y'+\frac{2}{x}y = x^2$. Nyt $p(x) = \frac{2}{x}$, $q(x) = x^2$ ja $\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = x^2$, $x \neq 0$. Ja nyt tuttuun tapaan

$$y' + \frac{2}{x}y = x^2 \Leftrightarrow x^2y' + \frac{2}{x}x^2y = x^4 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(x^2y) = x^4$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{5}x^3 + \frac{C}{x^2}$$

   jollain $C \in \mathbf{R}$.
   Nyt alkuarvosta $y(1) = 1$ seuraa $1 + \frac{1}{5} + C$, josta saamme $C = \frac{4}{5}$, jolloin AAT:n ratkaisu on $y(x) = \frac{1}{5}x^3 + \frac{4}{5}x^{-2}$.

   (b) Yhtälö on valmiiksi normaalimuodossa ja selvästi lineaarinen. Nyt $p(x) = \cos(x)$, $q(x) = \sin(x)\cos(x)$ ja $\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\sin(x)}$. Vastaavasti kuten yllä, nyt

$$y' + y\cos(x) = \sin(x)\cos(x) \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(e^{\sin(x)}y)$$
$$= e^{\sin(x)}\sin(x)\cos(x) \Leftrightarrow y = \sin(x) - 1 + Ce^{-\sin(x)},$$

missä viimeinen välivaihe saatiin osittaisintegroimalla ja $C \in \mathbf{R}$. Alkuarvosta $y(0) = 1$ seuraa $y(0) = \sin(0) - 1 + Ce^{-\sin(0)} = 1$ ja edelleen $C = 2$, jolloin AAT:n ratkaisu on $y(x) = \sin(x) - 1 + 2e^{-\sin(x)}$

3. Etsi yhtälön

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$$

yleinen ratkaisu.

Ratkaisu: Koska $\frac{x+y}{x-y} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$, sijoitetaan $z = \frac{y}{x}$ yhtälöön. Tällöin

$$z' = \frac{1}{x}(y' - z) = \frac{1}{x}\left(\frac{1+z^2}{1-z}\right),$$

mikä on separoituva yhtälö. Ratkaistaan se:

$$z' = \frac{1}{x}\left(\frac{1+z^2}{1-z}\right) \Leftrightarrow \int \frac{1-z}{1+z^2}dz = \int \frac{1}{x}dx = \log|x| + C$$

jollain $C \in \mathbf{R}$. Koska

$$\int \frac{1-z}{1+z^2}dz = \int \frac{1}{1+z^2}dz = -\frac{1}{2}\int \frac{2z}{1+z^2}dz = \arctan(z) - \frac{1}{2}\log(z^2+1),$$

saadaan yhtälö muotoon

$$\arctan(z) - \frac{1}{2}\log(z^2+1) = \log|x| + C,$$

johon sijoittamalla takaisin $z = \frac{y}{x}$ saamme yhtälön ratkaisun muotoon

$$\arctan(\frac{y}{x}) - \frac{1}{2}\log((\frac{y}{x})^2+1) = \log|x| + C,$$

millä ei kuitenkaan ole eksplisiittistä ratkaisua.

4. Ratkaise Bernoullin yhtälö

$$y' + 2xy + xy^4 = 0.$$

Ratkaisu: Yhtälö tunnistettiin helposti Bernoullin yhtälöksi, ja saatetaan se muotoon $y' + 2xy = -xy^4$. Nyt luentomateriaalin merkinnöillä (s.18) $p(x) = 2x$, $q(x) = -x$ ja $\lambda = 4$. Yhtälöllä on triviaaliratkaisu $y = 0$. Edetään ratkaisumenetelmän mukaan ja tehdään yhtälöstä lineaarinen. Jaetaan yhtälön molemmat puolet termillä y^4 ja sijoitetaan $z(x) = y(x)^{-3}$, jolloin $z' = -3y^{-4}y'$. Nyt saamme lineaarisen DY:n $-\frac{1}{3}z' + 2xz = -x$ ja edelleen $z' - 6xz = 3x$, missä $p_1(x) = -6x$, $q_1(x) = 3x$ ja $\mu_1(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{-3x^2}$. Lopulta

$$z' - 6xz = 3x \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(e^{-3x^2}z) = e^{-3x^2}3x \Leftrightarrow e^{-3x^2}z = -\frac{1}{2}e^{-3x^2} + C$$
$$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} + Ce^{3x^2}$$

jollakin $C \in \mathbf{R}$, ja tästä takaisin sijoittamalla saadaan haluttu ratkaisu $y(x) = (-2 + Ce^{3x^2})^{-\frac{1}{3}}$.

5. Populaatio kasvaa logistisen mallin

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

mukaisesti parametrilla $r = 0.5$. Alkupopulaation koko on sadasosa kantokyvystä K. Milloin populaation koko on (a) 50%, (b) 90%, (c) 99% kantokyvystä?

Ratkaisu: Kurssimonisteen sivulla 27 on ratkaistu logistinen yhtälö $N' = rN(1 - \frac{N}{K})$ muotoon

$$N = \frac{N_0 K}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}}$$

jossa $N_0 = N(0)$ ja meidän tapauksessa $r = 0.5$ sekä $N_0 = \frac{K}{100}$.

(a) Halutaan, että $N = 0.5K$. Sijoittamalla tämä yo. yhtälön ratkaisuun ja ratkaisemalla aika t saamme ajan $t = 9,19024..$ eli populaatiokoko on puolet kantokyvystä noin. 9,2 vuodessa.

(b) Vastaavasti haluamme, että $N = 0.9K$. Kuten yllä, saamme ajaksi $t = 13,5847..$ eli populaatio saavuttaa 90% kantokyvystä 13,5 vuodessa.

(c) Hyvin vastaavasti valitaan $N = 0.99K$ ja sijoittamalla saamme ajaksi $t = 18,3805..$

6. Oletetaan, että sikotauti, vihurirokko ja tuhkarokko leviävät SIR-mallin mukaisesti. Empiirisesti on todettu että näille taudeille R_0:n arvo on 18 (sikotauti), 7 (vihurirokko), ja 17 (tuhkarokko). Kuinka suuri osuus populaatiosta, jossa kenelläkään ei ole immuniteettisuojaa, saa kyseisen taudin jos epidemia puhkeaa?

   Ratkaisu: Kurssimateriaalin sivuilla 29 ja 30 johdetun SIR-mallin päälle oletamme, että epidemian alkaa pienestä osasta populaatiota: $i(0) \approx 0$ ja $s(0) \approx 1$, tartuntataudin malli saadaan miltei tarkasti muotoon $i(s) = 1 - s + \frac{1}{R_0} \ln s$. Koska olemme kiinnostuneet tartuntamallin lopullisesta tilanteesta, merkitsemme $i(s_\infty) = 0$ ja saamme yhtälön muotoon $s_\infty = 1 + \frac{1}{R_0} \ln s_\infty$.

   Nyt, tapauksessamme kaikilla taudeilla $R_0 \gg 1$, jolloin $s_\infty \ll 1$. Nyt saamme yhtälömme muotoon $0 = 1 + \frac{1}{R_0} \ln s_\infty$, edelleen $s_\infty = e^{-R_0}$ ja koska $r_\infty = 1 - s_\infty$, saamme viimein haluamamme muodon $r_\infty = 1 - e^{-R_0}$. Nyt sijoittamalla esimerkkitautien R_0:t edelliseen saamme sairastaneiden osuuden r_∞ sikotaudille $1 - 1,5 \cdot 10^{-8}$, vihurirokolle $1 - 9,1 \cdot 10^{-4}$ ja tuhkarokolle $1 - 4,1 \cdot 10^{-8}$.