**Differentialekvationer I**

1. övningens lösningsförslag, våren 2016

1. Vilka av följande differentialekvationer är separerbara? Här är $' = \frac{d}{dx}$).

   (a) $y' = y^3 + y$,

   (b) $y' = e^{x+4y}$,

   (c) $y' = \sin(x + y)$.

   *Lösning:* Vid beviset av separerbarhet söker vi upp sådana koefficientfunktioner $p$ och $q$, för vilka $y' = p(x)q(y)$ gäller. Sådana funktioner finns i fallet av en separerbar ekvation oändligt många, så vi kan välja från dem vilka som helst som exempel - dock oftast dem som är lättast att beteckna eller lösa integreringen för, såsom gjorts i dessa lösningar.

   (a) Vi märker att ekvationen kan skrivas i formen $y' = y^3 + y = 1 \cdot (y^3 + y)$. Ekvationen uppfyller alltså kravet $y' = p(x)q(y)$, då vi väljer $p(x) = 1$ och $q(y) = y^3 + y$, vilket per definition tyder på att ekvationen är separerbar.

   (b) Enligt exponentfunktionens räkneregler gäller $e^{x+4y} = e^x e^{4y}$, vilket leder till att ekvationen kan skrivas med hjälp av $p(x) = e^x$ och $q(y) = e^{4y}$. Ekvationen är alltså separerbar.

   (c) Ekvationen är icke separerbar. Ett exakt bevis fås genom att göra ett motantagande, men för oss räcker det att undersöka exempelvis sinusfunktionens Taylor-utveckling

$$\sin(x + y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)!}(x + y)^{2n+1},$$

   från vars variabeldel vi kan konstatera att vi inte kan skilja åt $x$- och $y$-beroendeheten till sina egna funktioner.

2. Bestäm genom att separera variablerna den allmäna lösningen till följande ekvationer.

   (a) $1 + y^2 + xyy' = 0$,

(b) $(1-x^2)\,y' = 1-y^2$.

*Lösning:*

(a) Vi märker att

$$\begin{aligned} 1+y^2+xyy' &= 0 \\ \Leftrightarrow xyy' &= -1-y^2 \\ \Leftrightarrow y' &= \frac{1}{x}\frac{1+y^2}{-y}, \end{aligned}$$

då $x, y \neq 0$, alltså är ekvationen separerbar. Vi söker lösningarna då $p(x) = \frac{1}{x}$ och $q(y) = \frac{-1-y^2}{y}$:
Eftersom $q(y) \neq 0$ för alla $y \in \mathbf{R}$, har ekvationen inga triviala lösningar. Den implicita lösningen fås genom separering

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x}\frac{1+y^2}{-y} \\ \Leftrightarrow \frac{-ydy}{1+y^2} &= \frac{dx}{x} \\ \Leftrightarrow \int \frac{-y}{1+y^2}dy &= \int \frac{1}{x}dx \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\ln|1+y^2| &= \ln|x| + C. \end{aligned}$$

Från detta fås den explicita lösningen

$$y(x) = \pm\frac{\sqrt{C-x^2}}{x},$$

då $x \neq 0$, $-\sqrt{C} < x < \sqrt{C}$ och $C \in \mathbf{R}$ är en konstant.

(b) Ekvationen är separerbar, eftersom

$$(1-x^2)y' = 1-y^2 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{1-x^2}(1-y^2),$$

då $x \neq \pm 1$. Ekvationens triviala lösningar fås från funktionen $q(y) = 1-y^2$ nollställen $y = \pm 1$. För den implicita lösningen separerar vi ekvationen:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1-x^2}(1-y^2) \\
\Leftrightarrow \frac{dy}{1-y^2} &= \frac{dx}{1-x^2} \\
\Leftrightarrow \int \frac{1}{1-y^2}dy &= \int \frac{1}{1-x^2}dx \\
\Leftrightarrow \tanh^{-1}(y) &= \tanh^{-1}(x) + C,
\end{aligned}$$

då $-1 < x < 1$ och $C \in \mathbf{R}$ är en konstant. För att få den explicita lösningen för ovanstående ekvation finns flera framföranden, varav en lösningsstig framförs här:

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \tanh^{-1}(y) &= \tanh^{-1}(x) + C \\
\Leftrightarrow y &= \tanh\big(\tanh^{-1}(x) + C\big) \\
\Leftrightarrow y &= \frac{x + \tanh(C)}{1 + x\tanh(C)} \\
\Leftrightarrow y &= \frac{x + C'}{1 + C'x},
\end{aligned}$$

då $C' \in \mathbf{R}$ är en konstant. Andra former för den allmäna lösningen är exempelvis

$$y = \frac{-xe^{C''} + e^{C''} - x - 1}{xe^{C''} - e^{C''} - x - 1},$$

där $C'' \in \mathbf{R}$ är en konstant.

3. Bestäm den allmäna lösningen till följande ekvationer och rita lösningskurvorna till några partikulärlösningar. Bestäm även eventuella singulärlösningar.

   (a) $x^2y' = y^2$,

   (b) $y' = \sqrt{y-3}$.

   *Lösning:*

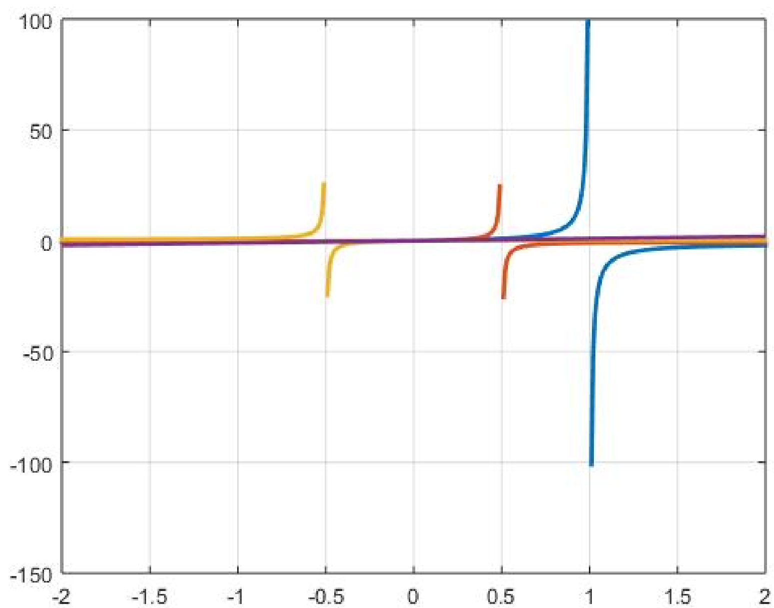
   (a) Ekvationen kan skrivas i formen $y' = \frac{1}{x^2}y^2$, alltså är den separerbar. Triviallösningen fås genom att ta reda på nollstället för funktionen $q(y) = y^2$ som är $y = 0$. För den implicita lösningen separerar vi ekvationen:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y^2}{x^2} \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2} &= \frac{dx}{x^2} \\ \Leftrightarrow \int \frac{1}{y^2} dy &= \int \frac{1}{x^2} dx \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{y} &= -\frac{1}{x} + C, \end{aligned}$$

från vilket vi löser

$$y(x) = \frac{x}{1 - Cx},$$

då $x \neq \frac{1}{C}$ och $C \in \mathbf{R}$ är en konstant.



(b) Vi konstaterar att ekvationen har en trivial lösning $y = 3$. Eftersom

$$y' = \sqrt{y-3} \Leftrightarrow y' = 1 \cdot \sqrt{y-3},$$

är ekvationen separerbar och som koefficientfunktion kan väljas $p(x) = 1$ samt $q(y) = \sqrt{y-3}$. Den implicita lösningen fås genom att integrera den separerbara ekvationen ledvis:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \sqrt{y-3} \\
\Leftrightarrow \frac{dy}{\sqrt{y-3}} &= dx \\
\Leftrightarrow \int \frac{1}{\sqrt{y-3}} dy &= \int 1 dx + C \\
\Leftrightarrow 2\sqrt{y-3} &= x + C.
\end{aligned}$$

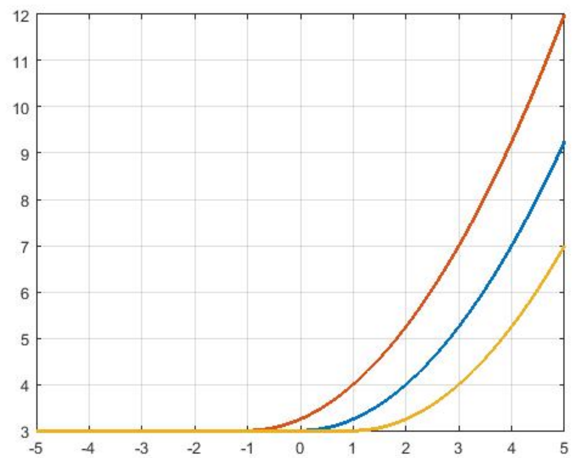
Eftersom kvadratroten alltid är icke-negativ, så är lösningen i kraft endast om $x \geq -C$. Från detta kan vi få den explicita lösningen:

$$y(x) = \frac{(x+C)^2}{4} + 3, x \geq -C.$$

Eftersom funktionen $y = 3$ uppfyller ekvationen, då $x < -C$, så är den allmäna lösningen

$$y(x) = \begin{cases} 3, & x < -C \\ \frac{(x+C)^2}{4} + 3, & x \geq -C, \end{cases}$$

eftersom lösningen är kontinuerligt deriverbar över hela reella axeln. Den tidigare hittade lösningen $y = 3$ är en singulär lösning, som inte alltså ingår i den allmäna lösningen.




4. Lös följande initialvärdesproblem ( $\dot{} = \frac{d}{dt}$).

   (a) $\dot{x} = x^2, \quad x(0) = 1,$

   (b) $\dot{x} = t\,x, \quad x(0) = 1.$

   *Lösning:*

   (a) Vi löser uppgiften genom att ta reda på lösningarna för ekvationen $\dot{x} = x^2$ och sedan fastställa konstanten med hjälp av initialvärdet:

   Ekvationen är separerbar, vilket man ser genom att välja $p(t) = 1$ och $q(x) = x^2$. Den triviala lösningen $x = 0$ förkastas denna gång, eftersom den inte uppfyller initialvärdesproblemet. Vi söker den implicita lösningen genom att separera ekvationen:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x^2 \\ \Leftrightarrow \frac{dx}{x^2} &= dt \\ \Leftrightarrow \int \frac{1}{x^2}dx &= \int 1dt \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{x} &= t + C. \end{aligned}$$

Från detta får vi löst funktionen $x$ explicit:

$$x(t) = \frac{1}{-C - t},$$

då $x \neq -C$ och $C \in \mathbf{R}$ är en ekvation.
Vi tar reda på värdet för konstanten $C$ då initialvärdet är $x(0) = 1$:

$$x(0) = \frac{1}{-C - 0} = \frac{1}{-C} \equiv 1,$$

och därmed är $C = -1$. Initialvärdesuppgiftens lösning blir alltså

$$x(t) = \frac{1}{1 - t}, \ t \neq 1.$$

(b) Ekvationen är separerbar, eftersom den kan skrivas med koefficientfunktionerna $p(t) = t$ och $q(x) = x$. Triviallösningen $x = 0$ förkastas pga initialvärdet. Vi söker upp den implicita lösningen genom att separera ekvationen:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= tx \\ \Leftrightarrow \frac{dx}{x} &= tdt + C \\ \Leftrightarrow \int \frac{1}{x} dx &= \int tdt + C \\ \Leftrightarrow \ln|x| &= \frac{1}{2}t^2 + C. \end{aligned}$$

Funktionen $x$ kan lösas explicit:

$$\begin{aligned} \ln|x| &= \frac{1}{2}t^2 + C \\ \Leftrightarrow e^{\ln|x|} &= e^{\frac{1}{2}t^2 + C} \\ \Leftrightarrow x &= \pm e^{\frac{1}{2}t^2 + C}. \end{aligned}$$

Vi tar reda på värdet för konstanten $C$ genom att använda initialvärdet $x(0) = 1$:

$$x(0) = \pm e^{\frac{1}{2} \cdot 0^2 + C} = \pm e^C \equiv 1,$$

alltså förkastas den negativa lösningen och vi får som värde $C = 0$. Initialvärdesuppgiftens lösning blir alltså

$$x(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}.$$

5. Bestäm den allmäna lösningen till följande ekvationer. (Tips: Du hittar en partikulärlösning till den fullständiga ekvationen med hjälp av en lämplig ansats.)

   (a) $\dot{x} + 2x = t^3 - t$,

   (b) $\dot{x} - x = \cosh t$.
   *Lösning:*

   (a) Vi löser först den homogena ekvationen $\dot{x} + 2x = 0$: Ekvationen är separerbar, eftersom vi kan skriva den som produkten av funktionerna $p(t) = -2$ och $q(x) = x$. Som implicit lösning får vi

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -2x \\ \Leftrightarrow \frac{dx}{x} &= -2dt \\ \Leftrightarrow \int \frac{1}{x}dx &= \int -2dt \\ \Leftrightarrow \ln|x| &= -2t + C, \end{aligned}$$

från vilken vi kan lösa explicit

$$\begin{aligned} \ln|x| &= -2t + C \\ \Leftrightarrow e^{\ln|x|} &= e^{-2t+C} \\ \Leftrightarrow x &= \pm e^{-2t+C} \end{aligned}$$

alltså är den homogena ekvationens allmäna lösning

$$x(t) = C'e^{-2t},$$

där $C' \in \mathbf{R}$ är en konstant.

Till näst söker vi genom en ansats den icke-homogena ekvationens lösning: Den icke-homogena delen är ett tredjegradens polynom, så vi söker efter en lösning av formen

$$x(t) = at^3 + bt^2 + ct + d,$$

där $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ är okända konstanter. Då får vi som derivata

$$\dot{x}(t) = 3at^2 + 2bt + c,$$

vilket ger oss ekvationens följande form

$$\begin{aligned}
\dot{x} + 2x &= 3at^2 + 2bt + c + 2at^3 + 2bt^2 + 2ct + 2d \\
&= 2at^3 + (3a + 2b)t^2 + (2b + 2c)t + (c + 2d) \\
&\equiv t^3 - t.
\end{aligned}$$

Från detta går det att härleda

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 3a + 2b = 0 \\ 2b + 2c = -1 \\ c + 2d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{4} \\ c = \frac{1}{4} \\ d = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

alltså uppfyller funktionen

$$x(t) = \frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}$$

den icke-homogena ekvationen. Ekvationens allmäna lösning är alltså

$$x(t) = C'e^{-2t} + \frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{4}t - \frac{1}{8},$$

där $C' \in \mathbf{R}$ är en konstant.

(b) Vi löser först den homogena ekvationen $\dot{x} - x = 0$: Vi skriver den i formen $\dot{x} = x$ och märker att lösningarna är exponentfunktioner $x(t) = Ce^t$, $C \in \mathbf{R}$ är en konstant. Ekvationen går att lösas som en separerbar ekvation.

Till näst söker vi någon lösning för den icke-homogena ekvationen. Hyperboliska cosinusfunktionen är definierad genom exponentfunktioner,

$$\cosh(t) = \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right),$$

så ansatsen torde vara liknande. Vi provar med formen

$$x(t) = \frac{at}{2}e^t + \frac{b}{2}e^{-t},$$

där $a, b \in \mathbf{R}$ är okända konstanter. Derivatafunktionen är

$$\dot{x}(t) = \frac{a}{2}e^t + \frac{at}{2}e^t - \frac{b}{2}e^{-t},$$

vilket ger oss att

$$\begin{aligned} \dot{x} - x &= \frac{a}{2}e^t + \frac{at}{2}e^t - \frac{b}{2}e^{-t} - \frac{at}{2}e^t - \frac{b}{2}e^{-t} \\ &= \frac{a}{2}e^t - be^{-t} \\ &\equiv \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}. \end{aligned}$$

Vi härleder konstanterna från ekvationen, alltså

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

En av icke-homogena ekvationens lösningar är alltså funktionen

$$x(t) = \frac{t}{2}e^t - \frac{1}{4}e^{-t},$$

vilket ger oss ekvationens allmäna lösning

$$x(t) = Ce^t + \frac{t}{2}e^t - \frac{1}{4}e^{-t},$$

där $C \in \mathbf{R}$ är en konstant.