Differentiaaliyhtälöt I

1. harjoituksen ratkaisuehdotuksia, kevät 2016

1. Mitkä seuraavista yhtälöistä ovat separoituvia? (Tässä $' = \frac{d}{dx}$).

   (a) $y' = y^3 + y$,

   (b) $y' = e^{x+4y}$,

   (c) $y' = \sin(x + y)$.

   Ratkaisu: Separoituvuuden todistamisessa etsitään yhtälölle sellaiset kerroinfunktiot p ja q, joille $y' = p(x)q(y)$. Tällaisia funktioita on separoituvan yhtälön tapauksessa ääretön määrä, joten niistä voidaan valita mikä tahansa pari esimerkiksi - usein tosin merkintöjen ja integroinnin mielessä helpoimmat tai yksinkertaisimmat, kuten näissä malleissa on tehty.

   (a) Huomataan, että yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa $y' = y^3+y = 1\cdot(y^3 + y)$. Yhtälö siis toteuttaa ehdon $y' = p(x)q(y)$, kun valitaan $p(x) = 1$ ja $q(y) = y^3 + y$, jolloin se on määritelmän mukaisesti separoituva.

   (b) Eksponenttifunktion laskusääntöjen nojalla $e^{x+4y} = e^x e^{4y}$, jolloin yhtälö voidaan kirjoittaa määritelmän muodossa valitsemalla $p(x) = e^x$ ja $q(y) = e^{4y}$. Yhtälö on siis separoituva.

   (c) Yhtälö ei ole separoituva. Varsinainen todistus saadaan vastaoletuksen avulla, mutta meille riittää tarkastella esimerkiksi sinifunktion Taylorin sarjaa

   $$\sin(x + y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)!}(x + y)^{2n+1},$$

   jonka muuttujatermin muodosta nähdään, että emme voi erottaa x- ja y-riippuvuutta omiksi funktioikseen.

2. Määritä muuttujat erottamalla seuraavien yhtälöiden yleiset ratkaisut.

   (a) $1 + y^2 + xyy' = 0$,

(b) $(1-x^2)\,y' = 1-y^2$.

Ratkaisu:

(a) Huomataan, että

$$\begin{aligned} 1+y^2+xyy' &= 0 \\ \Leftrightarrow xyy' &= -1-y^2 \\ \Leftrightarrow y' &= \frac{1}{x}\frac{1+y^2}{-y}, \end{aligned}$$

kun $x, y \neq 0$, eli yhtälö on separoituva. Etsitään ratkaisut, kun $p(x) = \frac{1}{x}$ ja $q(y) = \frac{-1-y^2}{y}$:
Koska $q(y) \neq 0$ kaikilla $y \in \mathbf{R}$, yhtälöllä ei ole triviaaliratkaisuja. Implisiittiratkaisu saadaan separoimalla

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x}\frac{1+y^2}{-y} \\ \Leftrightarrow \frac{-ydy}{1+y^2} &= \frac{dx}{x} \\ \Leftrightarrow \int \frac{-y}{1+y^2}dy &= \int \frac{1}{x}dx \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\ln|1+y^2| &= \ln|x| + C. \end{aligned}$$

Tästä saadaan eksplisiittinen ratkaisu

$$y(x) = \pm\frac{\sqrt{C-x^2}}{x},$$

kun $x \neq 0$, $-\sqrt{C} < x < \sqrt{C}$ ja $C \in \mathbf{R}$ on vakio.

(b) Yhtälö on separoituva, sillä

$$(1-x^2)y' = 1-y^2 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{1-x^2}(1-y^2),$$

kun $x \neq \pm 1$. Yhtälön triviaaliratkaisut saadaan funktion $q(y) = 1-y^2$ nollakohdista $y = \pm 1$. Implisiittiratkaisua varten separoidaan yhtälö:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1-x^2}(1-y^2) \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{1-y^2} &= \frac{dx}{1-x^2} \\ \Leftrightarrow \int \frac{1}{1-y^2}dy &= \int \frac{1}{1-x^2}dx + C \\ \Leftrightarrow \tanh^{-1}(y) &= \tanh^{-1}(x) + C, \end{aligned}$$

kun $-1 < x < 1$ ja $C \in \mathbf{R}$ on vakio. Tämän yhtälön eksplisiittiselle ratkaisulle on olemassa useita erilaisia esityksiä, joista yhden ratkaisupolku esitetään tässä:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \tanh^{-1}(y) &= \tanh^{-1}(x) + C \\ \Leftrightarrow y &= \tanh\big(\tanh^{-1}(x) + C\big) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{x + \tanh(C)}{1 + x\tanh(C)} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{x + C'}{1 + C'x}, \end{aligned}$$

kun $C' \in \mathbf{R}$ on vakio.

3. Määritä seuraavien yhtälöiden yleiset ratkaisut ja piirrä muutaman yksityisratkaisun ratkaisukäyrä. Määritä myös mahdolliset erikoisratkaisut.

   (a) $x^2y' = y^2$,

   (b) $y' = \sqrt{y-3}$.

   Ratkaisu:

   (a) Yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa $y' = \frac{1}{x^2}y^2$, joten se on separoituva. Triviaaliratkaisu saadaan selvittämällä funktion $q(y) = y^2$

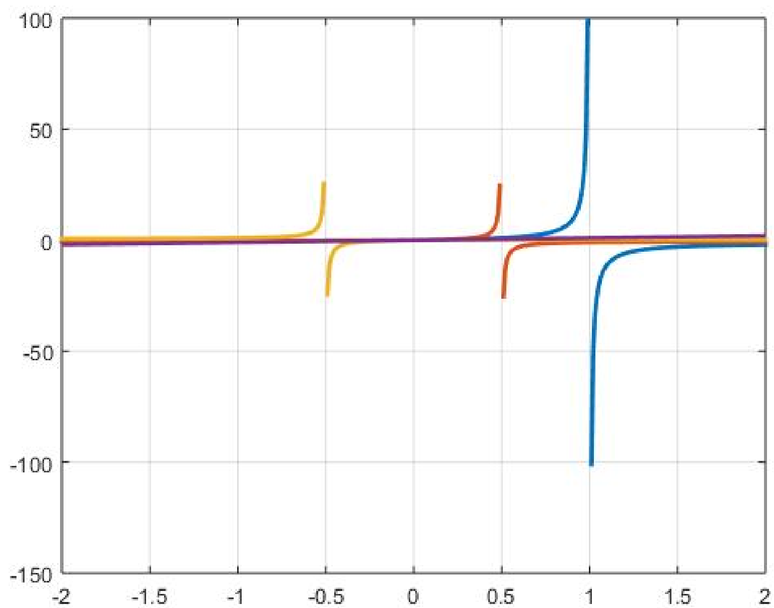
nollakohta $y = 0$. Implisiittiratkaisua varten separoidaan yhtälö:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{y^2}{x^2} \\
\Leftrightarrow \frac{dy}{y^2} &= \frac{dx}{x^2} \\
\Leftrightarrow \int \frac{1}{y^2} dy &= \int \frac{1}{x^2} dx + C \\
\Leftrightarrow -\frac{1}{y} &= -\frac{1}{x} + C,
\end{aligned}
$$

mistä ratkaistaan

$$y(x) = \frac{x}{1 - Cx},$$

kun $x \neq \frac{1}{C}$ ja $C \in \mathbf{R}$ on vakio.



(b) Todetaan, että yhtälöllä on triviaaliratkaisu $y = 3$. Koska

$$y' = \sqrt{y - 3} \Leftrightarrow y' = 1 \cdot \sqrt{y - 3},$$

eli yhtälö on separoituva ja kerroinfunktioiksi voidaan valita $p(x) = 1$ sekä $q(y) = \sqrt{y-3}$. Implisiittiratkaisu saadaan integroimalla separoitu yhtälö puolittain:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \sqrt{y-3} \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{\sqrt{y-3}} &= dx \\ \Leftrightarrow \int \frac{1}{\sqrt{y-3}} dy &= \int 1 dx + C \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{y-3} &= x + C. \end{aligned}$$

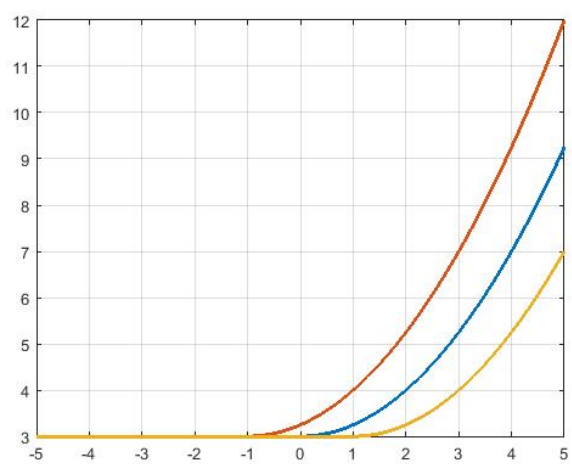
Koska neliöjuuri on aina epänegatiivinen, tämä ratkaisu on voimassa vain, jos $x \geq -C$. Tästä voidaan selvittää eksplisiittinen ratkaisu:

$$y(x) = \frac{(x+C)^2}{4} + 3, x \geq -C.$$

Koska funktio $y = 3$ toteuttaa yhtälön, kun $x < -C$, niin yleinen ratkaisu on

$$y(x) = \begin{cases} 3, & x < -C \\ \frac{(x+C)^2}{4} + 3, & x \geq -C, \end{cases}$$

sillä tämä on jatkuvasti derivoituva koko reaaliakselilla.



Edellä löydetty ratkaisu $y = 3$ on erikoisratkaisu, joka ei sisälly yleiseen ratkaisuun.

4. Ratkaise seuraavat alkuarvotehtävät ($\dot{} = \frac{d}{dt}$).

(a) $\dot{x} = x^2, \quad x(0) = 1,$

(b) $\dot{x} = t\,x, \quad x(0) = 1.$

Ratkaisu:

(a) Ratkaistaan tehtävä selvittämällä ensin yhtälön $\dot{x} = x^2$ ratkaisut ja kiinnittämällä sitten vakio alkuarvon avulla:

Yhtälö on separoituva, mikä voidaan nähdä valitsemalla $p(t) = 1$ ja $q(x) = x^2$. Triviaaliratkaisu $x = 0$ hylätään tällä kertaa, sillä se ei toteuta annettua alkuarvoa. Etsitään implisiittiratkaisu separoimalla yhtälö:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x^2 \\ \Leftrightarrow \frac{dx}{x^2} &= dt + C \\ \Leftrightarrow \int \frac{1}{x^2} dx &= \int 1 dt + C \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{x} &= t + C. \end{aligned}$$

Tästä saadaan ratkaistua funktio x eksplisiittisesti:

$$x(t) = \frac{1}{-C - t},$$

kun $x \neq -C$ ja $C \in \mathbf{R}$ on vakio.

Selvitetään vakion C arvo alkuarvon $x(0) = 1$ avulla:

$$x(0) = \frac{1}{-C - 0} = \frac{1}{-C} \equiv 1,$$

joten $C = -1$. Alkuarvotehtävän ratkaisuksi saadaan siis

$$x(t) = \frac{1}{1 - t}, \ t \neq 1.$$

(b) Yhtälö on separoituva, sillä se voidaan kirjoittaa kerroinfunktioiden $p(t) = t$ ja $q(x) = x$ avulla. Triviaaliratkaisu $x = 0$ hylätään alkuarvon vuoksi. Etsitään implisiittiratkaisu separoimalla yhtälö:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= tx \\
\Leftrightarrow \frac{dx}{x} &= tdt + C \\
\Leftrightarrow \int \frac{1}{x} dx &= \int tdt + C \\
\Leftrightarrow \ln|x| &= \frac{1}{2}t^2 + C.
\end{aligned}
$$

Funktio x voidaan ratkaista eksplisiittisesti:

$$
\begin{aligned}
\ln|x| &= \frac{1}{2}t^2 + C \\
\Leftrightarrow e^{\ln|x|} &= e^{\frac{1}{2}t^2 + C} \\
\Leftrightarrow x &= \pm e^{\frac{1}{2}t^2 + C}.
\end{aligned}
$$

Selvitetään vakion C arvo alkuarvon $x(0) = 1$ avulla:

$$x(0) = \pm e^{\frac{1}{2}\cdot 0^2 + C} = \pm e^C \equiv 1,$$

joten hylätään negatiivinen ratkaisufunktio ja saadaan vakion arvoksi $C = 0$. Alkuarvotehtävän ratkaisuksi saadaan siis

$$x(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}.$$

5. Etsi seuraavien yhtälöiden yleiset ratkaisut. (Vihje: Täydellisen yhtälön ysityisratkaisu löytyy sopivaa yritettä käyttäen.)

   (a) $\dot{x} + 2x = t^3 - t$,

   (b) $\dot{x} - x = \cosh t$.

   Ratkaisu:

   (a) Ratkaistaan ensin homogeeniyhtälö $\dot{x} + 2x = 0$: Yhtälö on separoituva, sillä voimme kirjoittaa sen esimerkiksi funktioiden $p(t) = -2$

ja $q(x) = x$ tulona. Implisiittiratkaisuksi saadaan

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -2x \\ \Leftrightarrow \frac{dx}{x} &= -2dt \\ \Leftrightarrow \int \frac{1}{x} dx &= \int -2dt + C \\ \Leftrightarrow \ln|x| &= -2t + C, \end{aligned}$$

josta voidaan ratkaista eksplisiittisesti

$$\begin{aligned} \ln|x| &= -2t + C \\ \Leftrightarrow e^{\ln|x|} &= e^{-2t+C} \\ \Leftrightarrow x &= \pm e^{-2t+C} \end{aligned}$$

eli homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on

$$x(t) = C'e^{-2t},$$

missä $C' \in \mathbf{R}$ on vakio.
Seuraavaksi etsitään yritteen avulla epähomogeeniyhtälön ratkaisu: Epähomogeeni osa on kolmannen asteen polynomi, joten etsitään ratkaisua muodossa

$$x(t) = at^3 + bt^2 + ct + d,$$

missä $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ ovat tuntemattomia vakioita. Tällöin derivaataksi saadaan

$$x(t) = 3at^2 + 2bt + c,$$

jolloin yhtälö on muodossa

$$\begin{aligned} \dot{x} + 2x &= 3at^2 + 2bt + c + 2at^3 + 2bt^2 + 2ct + 2d \\ &= 2at^3 + (3a + 2b)t^2 + (2b + 2c)t + (c + 2d) \\ &\equiv t^3 - t. \end{aligned}$$

Tästä voidaan päätellä

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 3a + 2b = 0 \\ 2b + 2c = -1 \\ c + 2d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{4} \\ c = \frac{1}{4} \\ d = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

eli funktio

$$x(t) = \frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}$$

toteuttaa epähomogeeniyhtälön. Yhtälön yleinen ratkaisu on siis

$$x(t) = C'e^{-2t} + \frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{4}t - \frac{1}{8},$$

missä $C' \in \mathbf{R}$ on vakio.

(b) Ratkaistaan ensin homogeeniyhtälö $\dot{x} - x = 0$: Kirjoitetaan se muodossa $\dot{x} = x$ ja huomataan, että ratkaisut ovat eksponenttifunktioita $x(t) = Ce^t$, $C \in \mathbf{R}$ on vakio. Yhtälön voi myös separoida.

Seuraavaksi etsitään jokin ratkaisu epähomogeeniyhtälölle. Hyperbolinen kosini on määritelty eksponenttifunktioiden avulla,

$$\cosh(t) = \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right),$$

joten yritteen lienee parasta olla myös samankaltainen. Kokeillaan muotoa

$$x(t) = \frac{at}{2}e^t + \frac{b}{2}e^{-t},$$

missä $a, b \in \mathbf{R}$ ovat tuntemattomia vakioita. Derivaattafunktio on

$$\dot{x}(t) = \frac{a}{2}e^t + \frac{at}{2}e^t - \frac{b}{2}e^{-t},$$

jolloin

$$\begin{aligned} \dot{x} - x &= \frac{a}{2}e^t + \frac{at}{2}e^t - \frac{b}{2}e^{-t} - \frac{at}{2}e^t - \frac{b}{2}e^{-t} \\ &= \frac{a}{2}e^t - be^{-t} \\ &\equiv \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}. \end{aligned}$$

Päätellään vakiot tästä yhtälöstä, eli

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Yksi epähomogeeniyhtälön ratkaisuista on siis funktio

$$x(t) = \frac{t}{2}e^t - \frac{1}{4}e^{-t},$$

jolloin yhtälön yleinen ratkaisu on

$$x(t) = Ce^t + \frac{t}{2}e^t - \frac{1}{4}e^{-t},$$

missä $C \in \mathbf{R}$ on vakio.