

Algebralliset rakenteet I

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos

Kevät 2016

Harjoitus 5

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 19.2.2016 klo 19.30

Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 04.03.2016 klo 19.30

Tehtäväsarja I

Tutustu kirjan lukuun 6.1, jossa käsitellään aliryhmän virittämistä.

1. Merkitään $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Mitkä seuraavista alkoista ovat ryhmän \mathbb{Q}^* aliryhmässä $\langle 3 \rangle$?

$$27, \quad 6, \quad \frac{1}{9}, \quad -3$$

2. Määritä ryhmän \mathbb{Z} aliryhmät $\langle 10 \rangle$ ja $\langle -10 \rangle$.

Tehtäväsarja II

- 3.* Tuloryhmällä $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on aliryhmä $H = \{(a, 2a) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Osoita, että ryhmä $(\mathbb{R}, +)$ on isomorfinen ryhmän $(H, +)$ kanssa. (Ryhmässä H laskutoimituksena on komponenteittain määritelty yhteenlasku.)

4. Tarkastellaan tason yksikköparaabelin kuvaajaa

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; y = x^2\}.$$

Keksitkö joukkoon P laskutoimituksen $*$ siten että $(\mathbb{R}, +)$ on isomorfinen ryhmän $(P, *)$ kanssa?

Tehtäväsarja III

Tässä kohtaa kurssikirjan 1. ja 2. painos poikkeavat hieman toisistaan. Jos omistat 1. painoksen, täytyy sinun ryhtyä tutustumaan lukuun 6.2.

5. Määritä ryhmän \mathbb{Z}_{15} aliryhmä $\langle [10]_{15} \rangle$. Jotta perustelusi on täsmällinen, käytä lemmaa 6.6. (Ensimmäisessä painoksessa lemmän numero on 6.7.)
6. Edellisen tehtävän vastaus on $\langle [10]_{15} \rangle = \{[0]_{15}, [5]_{15}, [10]_{15}\}$. Kuitenkin määritelmän mukaan alkion $[10]_{15}$ virittämässä aliryhmässä pitäisi olla kaikki alkion $[10]_{15}$ kokonaislukumonikerrat. Mikä aliryhmän alkoista on $4 \cdot [10]_{15}$? Entä $(-2) \cdot [10]$?
7. Tutkitaan matriisiryhmän $GL_2(\mathbb{R})$ alkioita $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Määritä aliryhmä $\langle A \rangle$. Mikä aliryhmän alkoista on A^5 ? Entä A^{-2} ?

Tehtäväsarja IV

8. Määritä seuraavien ryhmän S_6 alkioiden kertaluvut:

$$(14), \quad (253), \quad (14)(253).$$

9. Tutkitaan korttipakkaa, jossa on kymmenen korttia. Sekoitetaan kortteja niin, että otetaan pakan päältä neljän kortin pino ja laitetaan se pakan alle. Kuinka monen sekoituskerran jälkeen ollaan takaisin lähtötilanteessa?

Vihje: Edellisen tehtävän havainnoista on hyötyä.

Tehtäväsarja V

Tutustu kirjan lukuun 8, jossa käsitellään syklisiä ryhmiä.

10. Ryhmällä \mathbb{Z}_{16} on aliryhmä $H = \{[0]_{16}, [4]_{16}, [8]_{16}, [12]_{16}\}$. Onko olemassa alkioita, joka virittää aliryhmän H ? Toisin sanoen, onko H syklinen?

11. Onko ryhmän S_5 aliryhmä $\{(1), (25), (34), (25)(34)\}$ syklinen?

Tehtäväsarja VI

Kertaa ekvivalenssirelaation käsite kurssilta Johdatus yliopistomatematiikkaan tai tutustu lukuun 9, jossa käsitellään ekvivalenssirelaatioita.

12. Määritellään kokonaislukujen joukossa relaatio \sim ehdolla

$$a \sim b, \quad \text{jos luvussa } a \text{ on yhtä monta numeroa kuin luvussa } b.$$

Osoita, että \sim on ekvivalenssirelaatio. Miltä näyttävät sen ekvivalenssiluokat?

13. Määritellään kokonaislukujen joukossa relaatio \sim ehdolla

$$a \sim b, \quad \text{jos } -a + b \in 7\mathbb{Z}.$$

Osoita, että \sim on ekvivalenssirelaatio. Mikä tuttu relaatio on itse asiassa kyseessä?

14. Jatkoa edelliseen tehtävään. Määritä luvun 11 ekvivalenssiluokka. Missä yhteydessä olet aiemmin törmännyt tähän joukkoon?

Tehtäväsarja VII

15.* Olkoon $f: G \rightarrow H$ ryhmäisomorfismi. Osoita, että jos G on vaihdannainen ryhmä, myös H on vaihdannainen ryhmä.

16. Onko jäännösluokkaryhmä \mathbb{Z}_6 isomorfinen symmetrisen ryhmän S_3 kanssa?

Ylimääräinen tehtävä

17. Ovatko ryhmät (\mathbb{R}^*, \cdot) ja (\mathbb{C}^*, \cdot) isomorfiset? Huomaa, että joukot \mathbb{R}^* ja \mathbb{C}^* ovat yhtä mahtavat, eli niiden välillä on olemassa bijektio.