**Algebralliset rakenteet I**
**Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos**
**Kevät 2016**
**Harjoitus 3**

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 5.2.2016 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 19.2.2015 klo 19.30

## Tehtäväsarja I

1. Onko $H = \{7^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ryhmän $(\mathbb{Q}, +)$ aliryhmä?
2.* Onko $H = \{7^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ryhmän $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ aliryhmä?
3. Onko $(K_{12}, ⌚)$ ryhmän $(\mathbb{Z}, +)$ aliryhmä?

## Tehtäväsarja II

Lue kirjasta kappale 4.1, jossa käsitellään permutaatioita. Seuraavissa tehtävissä tutkitaan permutaatioita

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Piirrä kuvat permutaatioista $\sigma$, $\tau$ ja $\rho$. Voit valita mielestäsi parhaan tavan havainnollistaa permutaatiota.

Lue sitten kappale 4.2, jossa käsitellään permutaatioiden tuloa.

5. Laske tulot $\sigma \circ \tau$, $\tau \circ \sigma$ ja $\sigma \circ \rho$. Muista laskujärjestys!

Lue vielä kappaleesta 4.3 permutaation radoista.

6. Määritä permutaatioiden $\sigma$, $\tau$ ja $\rho$ radat. Kuvista on apua.

## Tehtäväsarja III

Kirjan luvussa 4.3 kerrotaan permutaation sykliesityksestä.

7. Seuraavassa on annettu permutaatioiden sykliesityksiä. Piirrä permutaatoista kuvat, joista näkyy, miten permutaatio kuvaa määrittelyjoukon alkioita.
   (a) ryhmän $S_4$ alkio $(1324)$
   (b) ryhmän $S_6$ alkio $(1324)$
   (c) ryhmän $S_5$ alkio $(14)(253)$
8. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa?
   (a) Ryhmän $S_6$ alkiot $(16)(35)$ ja $(35)(16)$ ovat samat.
   (b) Ryhmän $S_4$ alkiot $(134)$ ja $(143)$ ovat samat.
   (c) Ryhmän $S_6$ alkiot $(236)$ ja $(362)(4)(5)$ ovat samat.
9. Määritellään
   $$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 6 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$
   Kirjoita permutaatioiden $\alpha$ ja $\beta$ sykliesitykset. Pelkkä vastaus riittää ratkaisuksi.

**Tehtäväsarja IV**

10. Jäännösluokkien joukossa $\mathbb{Z}_n$ voi määritellä yhteenlaskun kaavalla $[a]_n + [b]_n = [a+b]_n$. Osoita, että

    (a) $[3]_5 + [6]_5 = [4]_5$
    (b) $[5]_7 + [3]_7 = [1]_7$.

    Mitä tuttua laskutoimitusta jäännösluokkien yhteenlasku muistuttaa?

11.* Päteekö $[-6]_3 + [2]_3 = [4]_3$? Perustele vastauksesi.

12. Muotoile tulos, jonka seuraava todistus todistaa.

    Oletetaan, että $x, y, z \in \mathbb{Z}$ ja $x \equiv y \pmod a$ sekä $y \equiv z \pmod a$. Nyt $a \mid (x - y)$ ja $a \mid (y - z)$. On siis olemassa $k, l \in \mathbb{Z}$, joille pätee $ka = x - y$ ja $la = y - z$. Tästä seuraa, että $x - z = (x - y) + (y - z) = ka + la = (k + l)a$. Siten $a \mid (x - z)$, eli $x \equiv z \pmod a$.

13. Jäännösluokkien joukko $\mathbb{Z}_5 = \{[0]_5, [1]_5, [2]_5, [3]_5, [4]_5\}$ on ryhmä jäännösluokkien yhteenlaskun suhteen. Kirjoita ryhmän laskutoimitustaulu.

**Tehtäväsarja V**

14. Tutustu kurssisivulla olevaan yhtälönratkaisua käsittelevään tekstiin.

    Merkitään
    $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

    (a) Osoita, että
    $$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$
    Voit tarvittaesa kerrata matriisikertolaskua kurssikirjan liitteestä.

    (b) Tutkitaan nyt yhtälöä
    $$XA = C,$$
    missä $X \in \mathbb{R}^{1\times 2}$. Tarkastellaan seuraavaa päättelyketjua:
    $$\begin{aligned} & XA = C \\ \Leftrightarrow\quad & XAB = CB \\ \Leftrightarrow\quad & XI = CB \\ \Leftrightarrow\quad & X = CB \\ \Leftrightarrow\quad & X = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$
    Tarkista, että $X = [-1\ 1]$ ei ole yhtälön $XA = C$ ratkaisu. Mikä päättelyssä menee pieleen?

    (c) Vaihda päättelyketjussa ekvivalenssinuolten tilalle tarpeen mukaan implikaationuolia niin, että päättelyketju on tosi.

15. Oletetaan, että $G$ on ryhmä, jossa on alkiot $a$ ja $b$. Ratkaise ryhmässä $G$ yhtälö $x^2a^2 = xb$.

    *Neuvo:* Muista edellisen tehtävän havainnot. Jos käytät yhtälönratkaisussa ekvivalenssinuolia, perustele päättelyn molemmat suunnat. Yhtälöitä on mahdollista ratkaista myös implikaatioiden avulla.

16. Oletetaan, että edellisessä kohdan ryhmä on kellotauluryhmä $(K_7, \text{◷})$. Oletetaan lisäksi, että $a = 4$ ja $b = 2$. Mikä tässä tapauksessa on yhtälön ratkaisu?

17.* Tutkitaan ryhmää $G = \{a, b, c, d, e, f\}$, jolla on seuraavanlainen laskutoimitustaulu:

| $+$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $f$ | $d$ | $a$ | $e$ | $b$ | $c$ |
| $b$ | $e$ | $c$ | $b$ | $f$ | $a$ | $d$ |
| $c$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ |
| $d$ | $b$ | $a$ | $d$ | $c$ | $f$ | $e$ |
| $e$ | $d$ | $f$ | $e$ | $a$ | $c$ | $b$ |
| $f$ | $c$ | $e$ | $f$ | $b$ | $d$ | $a$ |

Määritä seuraavat alkiot:

**(a)** $-d$ **(b)** $3a + 2e$ **(c)** $(-4)f$.

18. Oletetaan, että $(G, +)$ on vaihdannainen ryhmä, jolla on neutraalialkio $e$. Osoita, että joukko $H = \{a \in G \mid 3a = e\}$ on ryhmän $G$ aliryhmä.

## Ylimääräinen tehtävä

19. Lauseessa 3.17 on osoitettu, että kahden aliryhmän leikkaus on aina aliryhmä. Milloin kahden aliryhmän yhdiste on aliryhmä?