Algebra II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2016
Harjoitus 9

Tehtävistä keskustellaan keskiviikon tapaamisessa 13.4.
Ratkaisujen laatijat laittavat ratkaisuehdotuksensa Moodleen viimeistään tiistaina 12.4. ja korjatut ratkaisuehdotukset viimeistään tiistaina 19.4.

Symmetriaryhmät ja ryhmän toiminta

80. Määritä neliön symmetriaryhmän alkiot. Anna alkiot sekä permutaatioesitystä että matriisiesitystä käyttäen.

81. (a) Osoita, että esimerkissä 9.6 mainittu konjugointi määrittelee ryhmän toiminnan itsessään.
    (b) Olkoon X jokin joukko, jossa on määritelty ryhmän G toiminta. Osoita, että kaikkien kuvausten $X \to X$ joukossa voidaan määritellä ryhmän G vasen toiminta kaavalla $(gf)(x) = f(g^{-1}x)$.

82. Tutkitaan ryhmää $\mathbb{Z}_9^*$, joka koostuu kaikista renkaan $\mathbb{Z}_9$ yksiköistä. Joukossa $\mathbb{Z}_9$ on mahdollista määritellä ryhmän $\mathbb{Z}_9^*$ toiminta kaavalla $g.x = gx$.
    (a) Kurssimateriaalin mukaan ryhmän $\mathbb{Z}_9^*$ alkiot vastaavat joukon $\mathbb{Z}_9$ permutaatioita. Määritä alkoita $[1]_9$, $[2]_9$, $[4]_9$ ja $[5]_9$ vastaavat permutaatiot. Piirrä permutaatioista kuvat.
    (b) Määritä joukon $\mathbb{Z}_9$ alkioiden radat sekä kiinnittäjät.
    (c) Mitä huomoita teit radoista ja kiinnittäjistä laskujesi lomassa?

83. Osoita, että alkion kiinnittäjä on aina aliryhmä.

84. Määritä seuraavien ryhmien automorfismiryhmät:
    (a) $\mathbb{Z}_8$
    (b) Kleinin neliryhmä

85. Tee Moodlessa oleva oppimistesti 4.

Lisää tehtäviä kunnista ja kuntalaajennoksista

86. Osoita, että jokainen algebrallisesti suljettu kunta on ääretön.

87. Oletetaan tunnetuksi luvun π transkendenttisuus rationaalilukujen suhteen. Osoita, että ympyrän neliöinti ja kuution kahdentaminen ovat harppi–viivainkonstruktioina mahdottomia.

88. (a) Osoita, että äärellisen kunnan kertaluku on aina muotoa p^n, missä p on alkuluku ja $n \in \{1, 2, \ldots\}$.
    (b) Oletetaan, että p on alkuluku ja $n \in \{1, 2, \ldots\}$. Osoita, että on olemassa kunta, jonka kertaluku on p^n.