

Algebra II

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos

Kevät 2016

Harjoitus 8

Tehtävistä keskustellaan keskiviikon tapaamisessa 5.4.

Ratkaisujen laatijat laittavat ratkaisuehdotuksensa Moodleen viimeistään tiistaina 4.4. ja korjatut ratkaisuehdotukset viimeistään tiistaina 12.4.

Kunnat ja kuntalaajennokset

69. (a) Olkoon L kunnan K laajennos. Oletetaan, että $f \in K[X]$ on jaoton pääpolynomi, jolla on juuri $\alpha \in L$. Osoita, että f on alkion α minimipolynomi.
(b) Määritä $\min(\mathbb{Q}, \sqrt{2}i)$.
70. Todista lause 8.4 a).
71. Määritä seuraavissa tapauksissa joukon A virittämän laajennoksen L/K alilaajennoksen $K(A)$ aste:
(a) $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{C}$, $A = \{\sqrt{2}i\}$
(b) $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{C}$, $A = \{\sqrt{2}, i\}$
(c) $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{C}$, $A = \{\sqrt{2} + i\}$.
72. Selvitä seuraavat laajennosten asteet:
(a) $[\mathbb{Q}(e^{2\pi i/5}) : \mathbb{Q}]$
(b) $[\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$
(c) $[\mathbb{Q}(i, e^{\pi i/3}) : \mathbb{Q}]$
(d) $[\mathbb{F}_2([X^2]) : \mathbb{F}_2]$, missä $\mathbb{F}_2([X^2]) \subset \mathbb{F}_2[X]/\langle X^5 + X^3 + 1 \rangle$
73. Olkoon K kunta, jolla on laajennos L . Osoita, että jos a on transkendenttinen, niin renkaat $K[a]$ ja $K[X]$ ovat isomorfisia.
74. Selvitä itsellesi, mitä ovat äärelliset, äärellisviritteiset ja algebralliset laajennokset. Tutustu myös algebrallisen sulkeuman määritelmään. Tee itsellesi kaavio, joka kuvaa näiden käsitteiden välisiä yhteyksiä. Keksi myös havainnollisia esimerkkejä näistä rakenteista.
75. Todista lause 8.15.

Lisää tehtäviä kuntalaajennoksista

76. Todista lause 8.8 täsmällisesti.
77. Olkoon L kunnan K laajennos ja olkoon $A \subset L$ mielivaltainen joukko K :n suhteen algebrallisia alkioita. Osoita, että $K(A)/K$ on algebrallinen laajennos.
78. Olkoon $\mathbb{A} \subset \mathbb{C}$ kaikkien \mathbb{Q} :n suhteen algebrallisten lukujen joukko.
- (a) Osoita, että \mathbb{A} on \mathbb{Q} :n algebrallinen laajennos.
 - (b) Osoita, että \mathbb{A} on algebrallisesti suljettu \mathbb{C} :ssä.
79. Olkoon K kunta. Tarkastellaan muodollisten potenssisarjojen rengasta

$$K[[X]] = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i, \quad \text{missä } a_i \in K \text{ kaikilla } i,$$

ja sen osamääräkuntaa $K((X))$.

- (a) Määritä renkaan $K[[X]]$ yksikköryhmä.
- (b) Osoita, että osamääräkunta $K((X))$ koostuu muodollista Laurentin sarjoista, eli

$$K((X)) = \sum_{i=-n}^{\infty} a_i X^i, \quad \text{missä } n \in \mathbb{N} \text{ ja } a_i \in K \text{ kaikilla } i.$$