

Algebra II

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos

Kevät 2016

Harjoitus 7

Tehtävistä keskustellaan keskiviikon tapaamisessa 23.3.

Ratkaisujen laatijat laittavat ratkaisuehdotuksensa Moodleen viimeistään tiistaina 22.3. ja korjatut ratkaisuehdotukset viimeistään tiistaina 6.4.

Kunnat ja kuntalajennokset

Seuraavissa tehtävissä merkitään $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{F}_2$ kuten kunnista puhuttaessa yleensä on tapana.

59. (a) Keksi jokin renkaan $\mathbb{F}_2[X]$ jaoton polynomi, jonka aste on kaksi. Merkitään tätä polynomia tästä lähtien symbolilla p .
- (b) Osoita, että kaikki tekijärenkaan $\mathbb{F}_2[X]/\langle p \rangle$ alkioita voi kirjoittaa muodossa $q + \langle p \rangle$, missä $\deg(q) < 2$.
- (c) Määritä tekijärenkaan $\mathbb{F}_2[X]/\langle p \rangle$ alkioita.
- (d) Määritä renkaan $\mathbb{F}_2[X]/\langle p \rangle$ yhteen- ja kertolaskutaulut.
- (e) Etsi jokin juuri polynomille p renkaasta $\mathbb{F}_2[X]/\langle p \rangle$.
60. Jatkoa edelliseen tehtävään. Merkitään $K = \mathbb{F}_2[X]/\langle p \rangle$.
- (a) Osoita, että tekijärenkaas K on kunta. (Neuvo: Todistuksessa ei ole tarkoitus käyttää kunnan määritelmää eikä muitakaan määritelmiä.)
- (b) Ajatellaan kuntaa K vektoriavaruutena, jonka kerroinkunta on \mathbb{F}_2 . Mikä on tämän vektoriavaruuden dimensio? Käytä dimension määritelmää.
- (c) Määritä laajennoksen K/\mathbb{F}_2 aste käyttäen asteen määritelmää.
61. (a) Määritä laajennoksen \mathbb{R}/\mathbb{Q} alirengas $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ sekä alilajennos $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Sievennä joukkoja niin pitkälle kuin mahdollista.
- (b) Mikä on laajennoksen $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ aste?
62. Osoita, että $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ja $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ovat isomorfisia \mathbb{Q} -vektoriavaruuksina, mutta eivät kuntina.
63. Määritä laajennoksen \mathbb{C}/\mathbb{Q} alirengas $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, i]$. Sievennä joukkoa niin pitkälle kuin osaat.
64. Olkoon L kunnan K laajennos, ja olkoot $a, b \in L$. Osoita, että $K(a, b) = K(a)(b)$.

Lisää tehtäviä renkaista ja jaollisuudesta

65. Haluat selittää lauseen 6.12 todistuksen idean lyhyesti ja ymmärrettävästi kaverrillesi, jotta hän saa siitä yleiskuvan. Tiivistä tätä varten todistuksen idea (korkeintaan) kahteen virkkeeseen.
66. Onko rengas $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$ Eukleideen alue?
67. Tarkastellaan polynomien $f = X^4 - 1$ ja $g = X^3 + X$ virittämää ideaalia polynomirenkaassa $\mathbb{Z}[X]$.
- (a) Etsi $h \in \mathbb{Z}[X]$, jolle pätee $\langle h \rangle = \langle f, g \rangle$.
 - (b) Osoita, että tekijärenkaassa $\mathbb{Z}[X]/\langle f, g \rangle$ on alkio a , jolle pätee $a^2 = -1$.
68. Tutkitaan \mathbb{Q} -modulia \mathbb{R} . Osoita, että joukko $\{2^{1/n} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$ on vapaa. Päätele tästä, että \mathbb{R} ei ole kunnan \mathbb{Q} äärellinen laajennos.